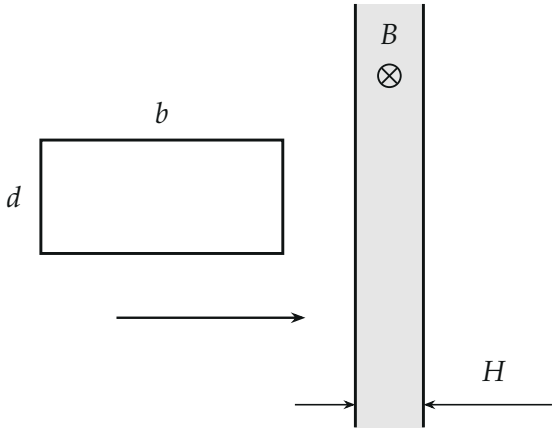
Проводящая рамка проходит область магнитного поля

Задача 4. [Физтех 2020/21, 11 класс, задача 4] Прямоугольная проводящая рамка массой m со сторонами d и $b = 2d$ движется по гладкой горизонтальной поверхности стола со скоростью V_0 перпендикулярно правой стороне рамки (см. рис.). Сопротивление рамки R. На пути рамки находится область однородного магнитного поля с индукцией B. Ширина поля $H = d/3$, индукция поля вертикальна, скорость рамки перпендикулярна границе поля. Известно, что рамка, двигаясь поступательно, проходит поле и покидает его. Индуктивность рамки не учитывать. Заданными считать m, d, V_0, R, B.

1. Определите ускорение рамки сразу после вхождения в поле.
2. Найдите скорость V_1 рамки при выходе правой стороны рамки из поля.
3. Найдите скорость V_2 рамки после выхода рамки из поля.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача про индукцию, шаблон такой: ЭДС → ток в цепи → сила Ампера → механика. Пока в поле находится одна из сторон рамки (сначала правая, потом левая), её движение создаёт ЭДС, по рамке идёт ток, а сила Ампера на эту сторону тормозит рамку

(правило Ленца: индукционный ток мешает изменению потока). Ширина поля $H = d/3$ меньше $b = 2d$, поэтому обе стороны сразу в поле никогда не оказываются, а между входом правой стороны и входом левой есть промежуток, где поле целиком внутри рамки: поток постоянен, тока нет, скорость не меняется. Ключ ко всей задаче: сила пропорциональна скорости, поэтому изменение скорости пропорционально пути в поле и от самой скорости не зависит.

Обозначения. V — скорость рамки в произвольный момент; x — координата правой стороны, ось x вдоль скорости, $x = 0$ на левой границе поля (поле занимает $0 < x < H$); $\mathcal{E}$ — ЭДС, I — ток, F_A — модуль силы Ампера.

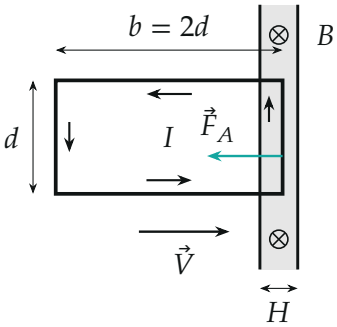
Пункт 1.

1. ЭДС и ток. В момент входа ($x = 0$, $V = V_0$) в поле только правая сторона длиной d. Площадь рамки в поле равна $d\,x$, поток $\Phi = Bdx$; за малое время dt он меняется на $Bd\,dx = BdV\,dt$, и по закону электромагнитной индукции

$$\mathcal{E} = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = BdV.$$

Тот же результат даёт сила Лоренца на электроны правой стороны: ЭДС движения равна $Bd\cdot V$. Индуктивность не учитываем, поэтому по закону Ома для всей рамки

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BdV}{R}.$$



Правая сторона в поле: ток против часовой стрелки, сила Ампера влево.

2. Сила Ампера. На правую сторону (длина d, поле перпендикулярно току) действует сила

$$F_A = BId = \frac{B^2d^2}{R}V.$$

Направление — против скорости: по правилу левой руки (поток «от нас» растёт, ток создаёт поле «к нам», то есть идёт против часовой стрелки; по Ленцу сила тормозит движение, породившее ток). Левая сторона вне поля, сил на неё нет; силы на участки верхней и нижней сторон, находящиеся в поле, равны по модулю и противоположны по направлению (токи там текут навстречу друг другу), поэтому направлены поперёк скорости и друг друга уравновешивают. Единственная сила вдоль стола — F_A на правую сторону.

3. Второй закон Ньютона для рамки в проекции на ось x: $ma = -F_A$, и модуль ускорения

$$a_0 = \frac{F_A}{m} = \frac{B^2d^2V_0}{mR}.$$

Знак: ускорение направлено против скорости, рамка тормозится.

Пункт 2.

4. Малый шаг. Пока правая сторона в поле ($0 < x < H$), в произвольный момент запишем второй закон Ньютона для рамки: $m\dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{B^2d^2}{R}V$. Умножим на dt; $V\,dt = dx$ — путь за dt:

$$m\,dV = -\frac{B^2d^2}{R}\,dx.$$

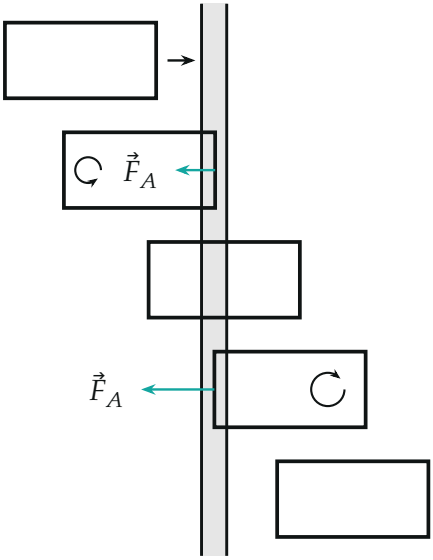
Справа стоит только путь: скорость исчезла, а значит, V убывает с путём *линейно* (график ниже). Просуммируем от входа правой стороны ($x = 0$, $V = V_0$) до выхода ($x = H$, $V = V_1$):

$$m(V_1 - V_0) = -\frac{B^2d^2}{R}H \quad\Longrightarrow\quad V_1 = V_0 - \frac{B^2d^2H}{mR} = V_0 - \frac{B^2d^3}{3mR}.$$

Знак: скорость уменьшилась — рамка теряет импульс на всём пути в

поле.

Второй способ — через заряд. Импульс силы Ампера за всё время: $\int F_A\,dt = Bd\int I\,dt = Bd\,q$, где q — заряд, протёкший по рамке; а $q = \Delta\Phi/R = BdH/R$ (поток вырос от нуля до BdH). Отсюда $m(V_0 - V_1) = B^2d^2H/R$ — тот же результат.



1) до поля: $\mathcal{E} = 0$, $V = V_0$

2) правая сторона в поле: ток против часовой стрелки, $V_0 \to V_1$

3) поле целиком внутри рамки: $I = 0$, $V = V_1$

4) левая сторона в поле: ток по часовой стрелке, $V_1 \to V_2$

5) после поля: $I = 0$, $V = V_2$

Пять положений рамки. Сила Ампера (бирюзовая стрелка) тормозит рамку всякий раз, когда в поле одна из её сторон; ток в этих положениях идёт в разные стороны.

Пункт 3.

5. Что происходит дальше. Как только правая сторона вышла из поля, поле целиком лежит внутри рамки ($b > H$, левая сторона левее его левой границы). Поток через рамку равен BdH и не меняется, $\mathcal{E} = 0$, $I = 0$, силы нет: $V = V_1$ неизменна, пока левая сторона не дойдёт до поля (до $x = b$).

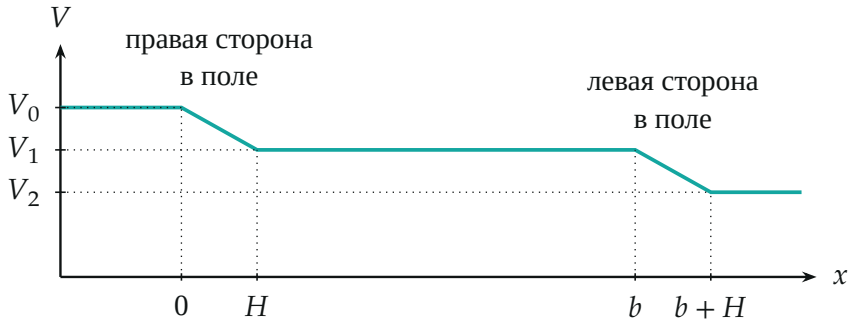
6. Левая сторона в поле. Для $b < x < b + H$ в поле находится только левая сторона, поток убывает, поэтому ток течёт по часовой стрелке (противоположно, чем раньше); модуль ЭДС и силы такие же: $\mathcal{E} = BdV$, $F_A = B^2d^2V/R$. Сила Ампера на левую сторону направлена против ско-

рости — рамку снова тормозит. Уравнение $m\,dV = -\dfrac{B^2d^2}{R}\,dx$ то же, пределы: от $x = b$ ($V = V_1$) до $x = b + H$ ($V = V_2$):

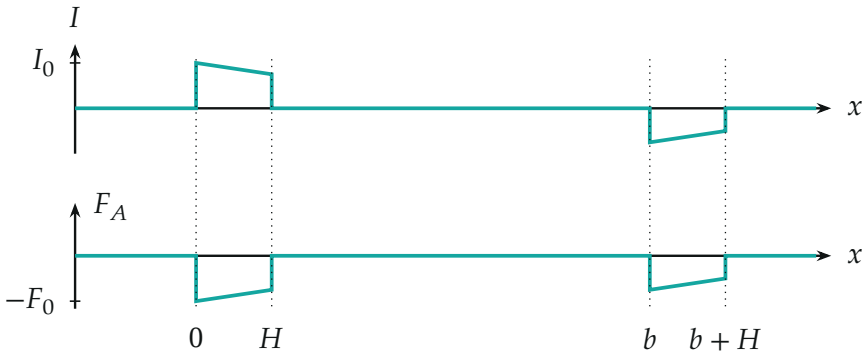
$$m(V_2 - V_1) = -\frac{B^2d^2H}{R} \quad \Longrightarrow \quad V_2 = V_1 - \frac{B^2d^3}{3mR} = V_0 - \frac{2B^2d^3}{3mR}.$$

Дальше обе стороны вне поля, $I = 0$, скорость остаётся V_2.

Обратите внимание: направление тока меняется, а направление силы — нет: сила Ампера всегда мешает входу или выходу рамки из поля, то есть направлена против скорости. Поэтому потери скорости на левой и на правой стороне *складываются*.



Скорость рамки от координаты x правой стороны (по x масштаб верный, по V условный). Наклон участков одинаков: $dV/dx = -B^2d^2/(mR)$.



Ток и сила Ампера как функции x: ток меняет знак, сила — нет; оба пропорциональны скорости ($F_0 = B^2d^2V_0/R$, $I_0 = BdV_0/R$).

Проверка. Размерность: B^2d^2/R — это кг/с (сила на скорость), поэтому $B^2d^2H/(mR)$ — м/с, как и должно быть для разности скоростей. Предел: $B \to 0$ или $R \to \infty$ — ток отсутствует, $V_1 = V_2 = V_0$. Условие «рамка покидает поле» означает $V_0 > 2B^2d^3/(3mR)$. Энергетическая проверка: потеря кинетической энергии $m(V_0^2 - V_2^2)/2 > 0$ уходит в тепло в рамке. Смысл: каждая сторона, пройдя поле, отнимает у рамки одну и ту же порцию скорости $B^2d^3/(3mR)$, потому что тормозящая сила пропорциональна скорости, а тормозной путь одинаков.

Ответ. 1) $a_0 = \dfrac{B^2d^2V_0}{mR}$ (против скорости); 2) $V_1 = V_0 - \dfrac{B^2d^3}{3mR}$; 3) $V_2 = V_0 - \dfrac{2B^2d^3}{3mR}$.