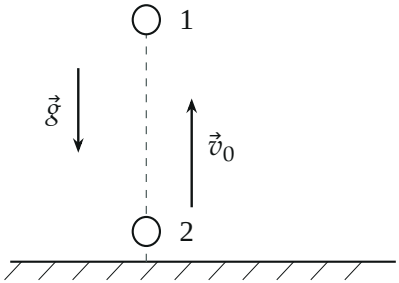
Два мяча, брошенных вверх

Задача 1. [Физтех 2020/21, 9 класс, задача 1] Девочка бросает вертикально вверх мяч. В момент, когда мяч достиг максимальной высоты, девочка бросает вертикально вверх второй мяч, с того же места и с той же скоростью, что и первый. В результате мячи столкнулись через время τ после броска второго мяча. Сопротивление воздуха не учитывать.

1. Какой максимальной высоты, считая от места броска, достиг первый мяч?
2. На какой высоте, считая от места броска, столкнулись мячи?
3. Найдите отношение путей, пройденных мячами до столкновения.

Рисунка в условии нет. Поясняющий рисунок:



Момент второго броска: первый мяч в верхней точке, второй вылетает с той же скоростью v_0.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на движение с постоянным ускорением $\vec{g}$ (бросок вверх). Оба мяча движутся по одному закону, только второй — с опозданием на время подъёма первого. Главная идея: движение вверх и вниз симметрично во времени, поэтому мяч, брошенный вверх, проходит каждую высоту дважды — на подъёме и на спуске — в моменты, симметричные относительно момента наивысшей точки. Столкновение — это момент, когда первый мяч на спуске оказывается там же, где второй на подъёме.

Обозначения. v_0 — скорость броска; $t_\text{п}$ — время подъёма первого мяча; A — точка броска, B — верхняя точка первого мяча, C — точка

столкновения; h — высота AB, H — высота AC. Ось y направим вертикально вверх от точки броска, время t отсчитываем от броска первого мяча.

1. Законы движения. Оба мяча движутся с ускорением $\vec{g}$, направленным вниз. Кинематика равноускоренного движения в проекции на ось y:

$$y_1(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

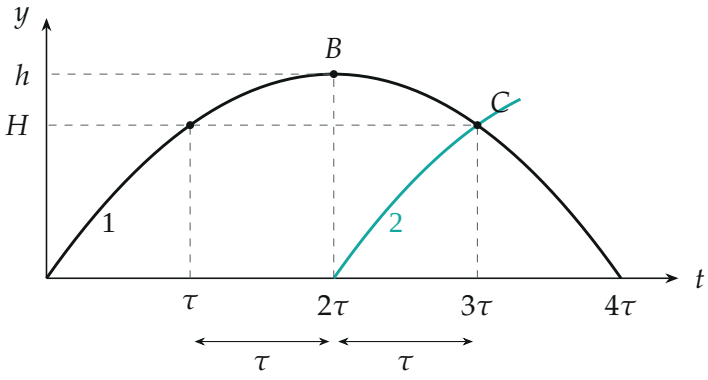
$$y_2(t) = v_0(t - t_\text{п}) - \frac{g(t - t_\text{п})^2}{2} \quad (t \geq t_\text{п}),$$

то есть $y_2(t) = y_1(t - t_\text{п})$ — второй мяч повторяет движение первого с опозданием $t_\text{п}$. Время подъёма — момент, когда скорость $v_0 - gt$ обращается в ноль: $t_\text{п} = v_0/g$.

2. Когда мячи встречаются. График $y_1(t)$ — парабола, симметричная относительно $t = t_\text{п}$: на одной высоте мяч бывает в моменты $t_\text{п} - s$ и $t_\text{п} + s$. В момент встречи $t_\text{в}$ первый мяч (на спуске) находится там же, где второй, то есть где был сам первый в момент $t_\text{в} - t_\text{п}$ (на подъёме). Значит, эти моменты симметричны относительно $t_\text{п}$:

$$\frac{t_\text{в} + (t_\text{в} - t_\text{п})}{2} = t_\text{п} \quad \Rightarrow \quad t_\text{в} = \frac{3}{2} t_\text{п}.$$

По условию встреча через τ после второго броска: $t_\text{в} - t_\text{п} = \frac{1}{2} t_\text{п} = \tau$. Отсюда $t_\text{п} = 2\tau$ и $v_0 = gt_\text{п} = 2g\tau$.



Графики $y(t)$: чёрный — первый мяч, бирюзовый — второй (та же парабола, сдвинутая на 2τ). Точки τ и 3τ симметричны относительно вершины 2τ, поэтому высоты в них одинаковы.

Пункт 1.

3. Максимальная высота. Подъём от A до B длится 2τ; обратим время: спуск из B без начальной скорости за то же время 2τ проходит

$$h = \frac{g(2\tau)^2}{2} = 2g\tau^2.$$

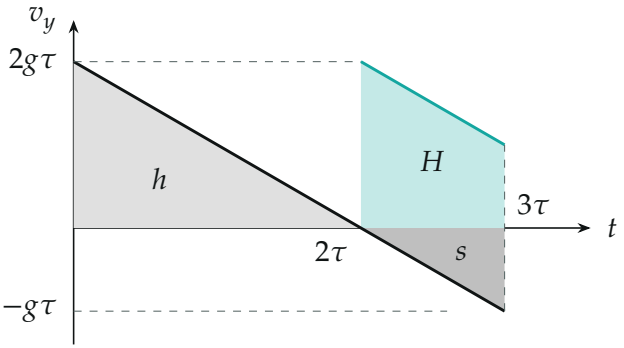
Тот же ответ из закона движения: $h = y_1(2\tau) = 2g\tau \cdot 2\tau - \dfrac{g \cdot 4\tau^2}{2} = 2g\tau^2$.

Пункт 2.

4. Высота встречи. Первый мяч падает из B без начальной скорости в течение τ и опускается на $\dfrac{g\tau^2}{2}$:

$$H = h - \frac{g\tau^2}{2} = 2g\tau^2 - \frac{1}{2}g\tau^2 = \frac{3}{2}g\tau^2.$$

Проверим по второму мячу: $y_2 = v_0\tau - \dfrac{g\tau^2}{2} = 2g\tau^2 - \dfrac{1}{2}g\tau^2 = \dfrac{3}{2}g\tau^2$ — совпало.



Проекции скоростей на ось y. Площадь под графиком — перемещение: серый треугольник — подъём первого мяча h, тёмный — его спуск $s = h - H$,

бирюзовая трапеция — подъём второго мяча H.

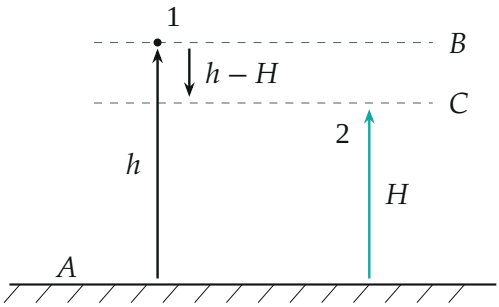
Пункт 3.

5. Пути. Путь — длина траектории, а не перемещение. Первый мяч поднялся на h и опустился на $s = h - H = \frac{1}{2}g\tau^2$; второй только поднимался на H (его скорость в момент встречи $v_0 - g\tau = g\tau > 0$, он ещё летит вверх):

$$S_1 = h + (h - H) = 2g\tau^2 + \frac{1}{2}g\tau^2 = \frac{5}{2}g\tau^2, \qquad S_2 = H = \frac{3}{2}g\tau^2,$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{3}.$$

По рисунку скоростей это отношение суммы площадей серого и тёмного треугольников к площади трапеции: $(2 + \frac{1}{2}) : \frac{3}{2}$ в единицах $g\tau^2$.



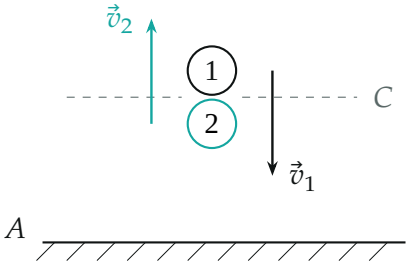
Пути мячей до встречи (траектории разведены по горизонтали для наглядности, на самом деле обе на одной вертикали): первый — вверх на h и вниз на $h - H$, второй — вверх на H.

Обратите внимание. Путь первого мяча — не его перемещение H: он прошёл точку C дважды (на подъёме и на спуске), поэтому $S_1 = 2h - H$.

Проверка. Размерность: $g\tau^2$ — м/с^2·с^2 = м. Второй способ для $t_в$ — приравнять координаты, $y_1(t) = y_2(t)$, при $v_0 = gt_п$. После деления на g и раскрытия скобок квадраты t^2 сокращаются:

$$t_п t - \frac{t^2}{2} = t_п t - t_п^2 - \frac{t^2 - 2tt_п + t_п^2}{2} \quad \Rightarrow \quad tt_п = \frac{3}{2}t_п^2, \qquad t = \frac{3}{2}t_п,$$

как и по симметрии. В момент встречи скорости мячей $-g\tau$ и $+g\tau$ — равны по модулю и противоположны: встреча посередине по времени между вторым броском и возвращением первого мяча.



Момент встречи: $v_1 = v_2 = g\tau$, скорости противоположны.

Смысл: оба мяча — одна и та же парабола, сдвинутая во времени, и встречаются они там, где спуск одного совпадает с подъёмом другого.

Ответ. 1) $h = 2g\tau^2$; 2) $H = \dfrac{3}{2}g\tau^2$; 3) $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{5}{3}$.