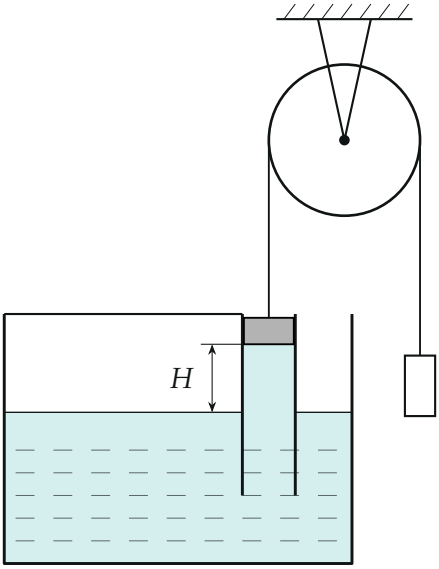
Поршень в трубе над водой, связанный с грузом

Задача 2. [Физтех 2020/21, 9 класс, задача 2] В сосуде с водой удерживается в вертикальном положении труба, прикреплённая к сосуду (см. рис.). Поршень площадью 8 см^2 и массой 50 г, лежащий на воде, связан с грузом лёгкой нитью, перекинутой через блок. В результате вода поднялась на высоту $H = 10$ см по сравнению с уровнем воды в сосуде, и система оказалась в равновесии.



1. Найдите давление в воде непосредственно под поршнем.
2. Найдите массу груза.
3. На каком расстоянии от поверхности воды в сосуде окажется нижний край поршня, если на поршень поставить гирю массой 120 г?

Атмосферное давление $P_0 = 100$ кПа, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, $g = 10$ м/с^2. Трением в оси блока и поршня о стенки трубы пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатику и равновесие тел. Груз через нить тянет поршень вверх, и поршень, прилегая к воде, поднимает за собой столб воды в трубе, как насос. Вода в трубе выше уровня в сосуде, поэтому давление под поршнем *меньше* атмосферного

— атмосфера снаружи вдавливает воду в трубу. Главная идея: давление в покоящейся воде на одном горизонтальном уровне одинаково, а с высотой убывает на ρg на каждый метр. Дальше — равновесие поршня под действием четырёх сил.

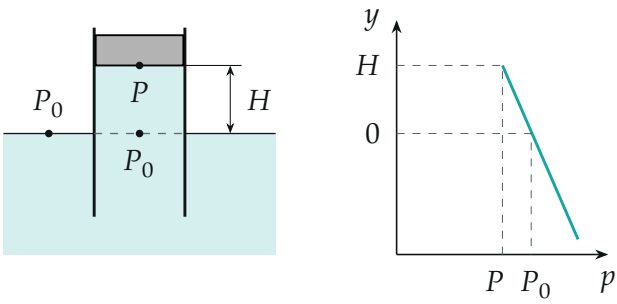
Обозначения. $S = 8\ \text{см}^2 = 8 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2$ — площадь поршня; $m_1 = 50$ г — масса поршня; m_2 — масса груза; $m = 120$ г — масса гири; P — давление воды под поршнем; T — сила натяжения нити; H_1 — глубина нижнего края поршня под уровнем воды в сосуде в пункте 3.

Пункт 1.

1. Давление под поршнем. Поверхность воды в сосуде открыта атмосфере, там давление P_0. Внутри трубы на этом же уровне (вода в трубе и в сосуде сообщается через нижний открытый конец трубы) давление тоже P_0: в покоящейся жидкости на одном горизонтальном уровне давление одинаково. Поднимаясь на высоту H, давление убывает на вес столба воды, приходящийся на единицу площади:

$$P = P_0 - \rho g H = 100\ \text{кПа} - 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}1\ \text{Па} = 99\ \text{кПа}.$$

Знак: давление под поршнем меньше атмосферного на 1 кПа.

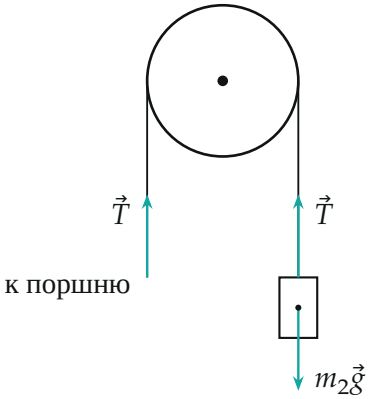


Давление в трубе: на уровне воды в сосуде — P_0, у поршня (выше на H) — меньше на $\rho g H$. Справа — давление в трубе в зависимости от высоты y над уровнем воды в сосуде.

Пункт 2.

2. Натяжение нити. Груз висит неподвижно; второй закон Ньютона для груза в проекции на вертикаль: $T = m_2 g$. Нить лёгкая, трения в

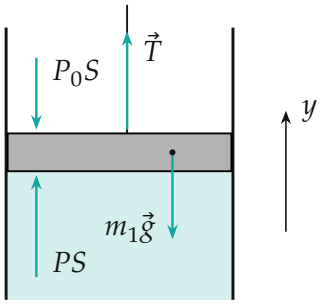
оси блока нет, поэтому натяжение по обе стороны блока одинаково — поршень нить тянет вверх с той же силой T.



Силы, действующие на груз, и натяжение нити со стороны поршня: блок без трения, нить лёгкая — натяжение одинаково.

3. Равновесие поршня. На поршень действуют: сила тяжести $m_1 g$ и сила давления воздуха сверху $P_0 S$ — вниз; сила давления воды снизу PS и натяжение T — вверх. Поршень покоится, сумма сил равна нулю; в проекции на вертикальную ось вверх:

$$PS + T - P_0 S - m_1 g = 0.$$



Силы, действующие на поршень в положении равновесия (пункт 2). Сила давления воды PS меньше силы давления воздуха $P_0 S$.

4. Масса груза. Подставим $P = P_0 - \rho g H$ и $T = m_2 g$:

$$(P_0 - \rho g H)S + m_2 g = P_0 S + m_1 g \quad \Rightarrow \quad m_2 = m_1 + \rho H S.$$

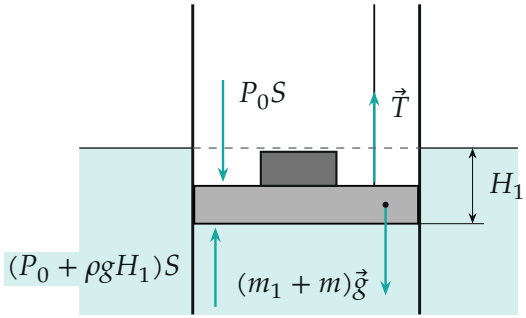
Атмосферное давление сократилось: важна только разность давлений сверху и снизу. Здесь $\rho H S = 1000 \cdot 0{,}1 \cdot 8 \cdot 10^{-4}$ кг $= 80$ г — это масса столба воды, поднятого в трубе:

$$m_2 = 50 \text{ г} + 80 \text{ г} = 130 \text{ г}.$$

Второй способ: систему «поршень + столб воды над уровнем сосуда» снизу подпирает давление P_0, сверху давит тоже P_0; значит, груз уравновешивает её вес $(m_1 + \rho H S)g$ — то же самое.

Пункт 3.

5. Куда сдвинется поршень. С гирей вниз действует $(m_1 + m)g$, это 170 г, а нить тянет вверх только $m_2 g$, 130 г. Значит, поршню нужна дополнительная сила снизу: давление воды под ним должно стать *больше* атмосферного. Это возможно, только если нижний край поршня опустится ниже уровня воды в сосуде, на глубину H_1. Тогда давление под поршнем $P_0 + \rho g H_1$ (уровень воды в сосуде считаем неизменным: сосуд широкий по сравнению с трубой).



Пункт 3: с гирей поршень опустился ниже уровня воды в сосуде на H_1; давление под ним больше атмосферного.

6. Равновесие поршня с гирей. Сумма сил, действующих на поршень с гирей, равна нулю; в проекции на вертикаль вверх ($T = m_2 g$

по-прежнему — груз снова висит неподвижно):

$$(P_0+\rho g H_1)S+m_2 g-P_0 S-(m_1+m)g=0 \quad \Rightarrow \quad H_1=\frac{m_1+m-m_2}{\rho S}.$$

$$H_1=\frac{(50+120-130)\cdot 10^{-3}}{1000\cdot 8\cdot 10^{-4}}\ \text{м}=0{,}05\ \text{м}=5\ \text{см}.$$

$H_1>0$ — поршень действительно ниже уровня воды в сосуде, как мы и предположили.

Обратите внимание. Сила давления воздуха P_0S действует на поршень сверху и в пункте 2, и в пункте 3 — её нельзя забывать, хотя в ответ входит только разность $P-P_0$. Если записать одну лишь силу давления воды снизу, ответ ошибётся на $P_0S/g=8$ кг.

Проверка. Размерность $\dfrac{m}{\rho S}\colon \dfrac{\text{кг}}{\text{кг/м}^3\cdot\text{м}^2}=\text{м}$. Предел: без гири ($m=0$) получилось бы $H_1=(m_1-m_2)/(\rho S)=-10$ см, то есть поршень на 10 см *выше* уровня — ровно исходное положение H. Смысл: разница между грузом и поршнем (в пункте 2 — 80 г в пользу груза, в пункте 3 — 40 г в пользу поршня с гирей) уравновешивается столбом воды той же массы — 8 г на каждый сантиметр высоты в трубе сечением 8 см^2.

Ответ. 1) $P=P_0-\rho g H=99$ кПа; 2) $m_2=m_1+\rho HS=130$ г; 3) $H_1=\dfrac{m_1+m-m_2}{\rho S}=5$ см (ниже уровня воды в сосуде).