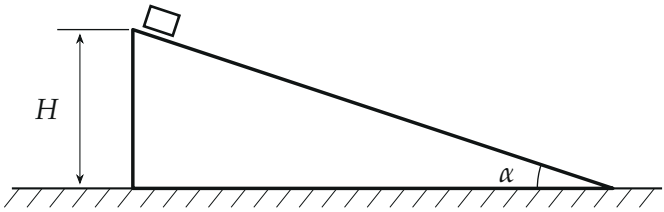
Шайба и клин на гладком столе

Задача 4. [Физтех 2020/21, 9 класс, задача 4] Клин находится на гладкой горизонтальной поверхности стола. Гладкая поверхность клина составляет угол α ($\cos\alpha = 4/5$) с горизонтом (см. рис.). Вблизи вершины клина на высоте H удерживают небольшую по размерам шайбу массой m. Масса клина $3m$.



1. За какое время шайба съедет с клина, если клин удерживать, а шайбу отпустить?

Клин и шайбу одновременно отпускают, и они разъезжаются.

2. Найдите ускорение клина.
3. Через какое время шайба достигнет стола?

Направления всех движений в одной вертикальной плоскости.

▲ **Решение. Что происходит.** В первой части клин неподвижен, и шайба просто соскальзывает с гладкой наклонной плоскости с постоянным ускорением. Во второй части клин свободен: шайба давит на него, горизонтальная составляющая этой силы толкает клин назад, и он разъезжается с шайбой. Это задача на связанное движение тел с клином. Ключ — *кинематическая связь*: относительно клина шайба по-прежнему движется вдоль его поверхности, поэтому ускорение шайбы складываем из ускорения клина (переносного) и ускорения шайбы относительно клина (относительного). Все силы постоянны, движения равноускоренные.

Обозначения. $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$; $M = 3m$ — масса клина; $L = H/\sin\alpha = \frac{5}{3}H$ — длина пути шайбы по склону; N — сила нормальной реакции клина на шайбу; $\vec{a}$ — ускорение клина (горизонтально, влево — в сторону, противоположную движению шайбы); $\vec{a}_0$ — ускорение шайбы относительно клина (вдоль склона вниз).

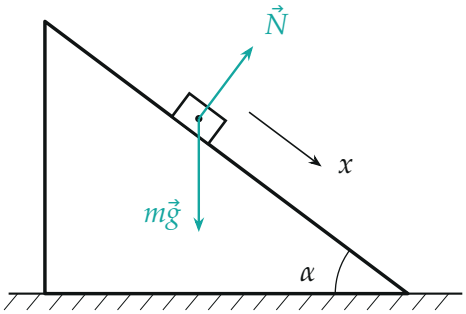
Пункт 1.

1. Шайба на неподвижном клине. На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$ (перпендикулярно поверхности, трения нет). Ось x направим вдоль склона вниз — по ускорению: тогда N в уравнение не войдёт. Второй закон Ньютона в проекции на x:

$$ma_x = mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a_x = g\sin\alpha = \frac{3}{5}g.$$

Путь L без начальной скорости: $L = \dfrac{a_x t_1^2}{2}$, откуда

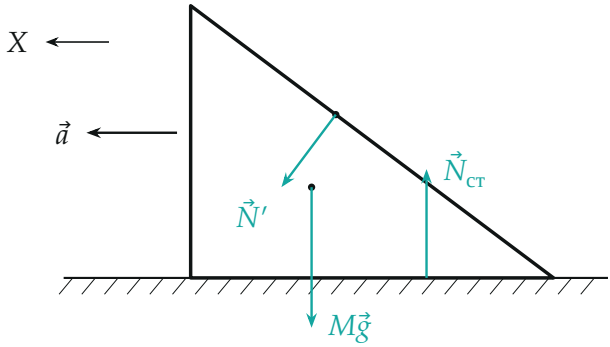
$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2H}{g\sin^2\alpha}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$



Пункт 1: силы, действующие на шайбу на неподвижном клине. Ось x — вдоль склона вниз; проекция $m\vec{g}$ на неё равна $mg\sin\alpha$, проекция $\vec{N}$ — нулю.

Пункт 2.

2. Силы. Теперь клин свободен. Шайба давит на клин с силой $\vec{N}' = -\vec{N}$ (третий закон Ньютона), направленной перпендикулярно склону внутрь клина. Её горизонтальная составляющая $N\sin\alpha$ ничем не уравновешена (стол гладкий), и клин разгоняется влево. Вертикальные силы клина — тяжесть Mg, давление шайбы $N\cos\alpha$ и реакция стола — уравновешены: клин по вертикали не движется.



Силы, действующие на клин. Горизонтальную составляющую имеет только сила давления шайбы $\vec{N}'$ — она и разгоняет клин влево.

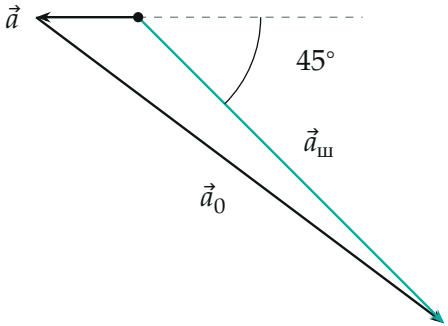
3. Второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную ось X, направленную влево (по ускорению клина; так в уравнение не войдут ни Mg, ни реакция стола):

$$Ma = N\sin\alpha.$$

4. Кинематическая связь. Шайба не отрывается от клина и скользит по его поверхности, поэтому её ускорение

$$\vec{a}_{ш} = \vec{a} + \vec{a}_0,$$

где $\vec{a}$ — ускорение клина, а $\vec{a}_0$ направлено вдоль склона вниз. Вектор $\vec{a}$ горизонтален и направлен влево; его проекция на нормаль к склону (вверх от поверхности) равна $a\sin\alpha$, а на ось вдоль склона вниз — $-a\cos\alpha$.

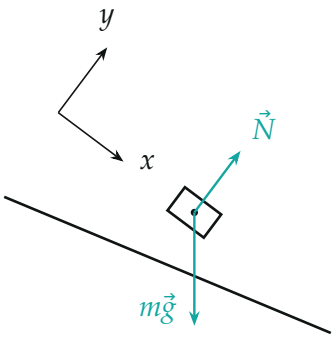


Сложение ускорений (в единицах $g/7$, масштаб вычисленный): $a = 1, a_0 = 5$ вдоль склона, ускорение шайбы относительно стола $\vec{a}_ш$ — под 45° к горизонту.

5. Второй закон Ньютона для шайбы в проекции на нормаль к склону (ось y вверх от поверхности): эта ось выбрана, чтобы неизвестное a_0 не вошло в уравнение — относительное ускорение направлено вдоль склона и на нормаль не проецируется. Остаётся проекция ускорения клина: склон отступает от шайбы влево-вниз, и шайба ускоряется вслед за ним, $a_y = -a\sin\alpha$:

$$N - mg\cos\alpha = -ma\sin\alpha.$$

Поэтому $N = m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)$ — меньше, чем на неподвижном клине.



Тело m на подвижном клине: те же две силы, оси вдоль склона (x) и по нормали к нему (y).

6. Ускорение клина. Подставим N из шага 5 в уравнение для клина:

$$Ma = m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha},$$

$$a = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}}{3 + \frac{9}{25}}\,g = \frac{12/25}{84/25}\,g = \frac{g}{7}.$$

Пункт 3.

7. Ускорение шайбы вдоль склона. Второй закон Ньютона для шайбы в проекции на ось x вдоль склона вниз (N сюда не входит); проекция

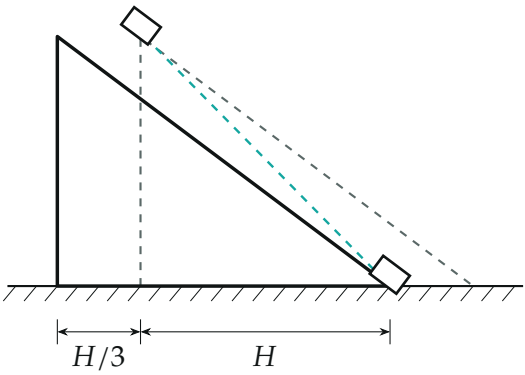
ускорения шайбы $a_0 - a\cos\alpha$:

$$m(a_0 - a\cos\alpha) = mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a_0 = g\sin\alpha + a\cos\alpha = \frac{3}{5}g + \frac{4}{5}\cdot\frac{g}{7} = \frac{5}{7}g.$$

8. Время. Относительно клина шайба проходит весь склон $L = \dfrac{H}{\sin\alpha}$ без начальной скорости с ускорением a_0; дойдя до основания клина, она оказывается на столе:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L}{a_0}} = \sqrt{\frac{2H}{a_0\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2H\cdot 7\cdot 5}{5\cdot 3g}} = \sqrt{\frac{14H}{3g}}.$$

9. Второй способ — закон сохранения импульса. Внешние силы (тяжесть, реакция стола) вертикальны, поэтому горизонтальная проекция импульса системы «шайба + клин» сохраняется и равна нулю; значит, и горизонтальные ускорения связаны: $m\,a_{шх} = Ma$. Из рисунка сложения $a_{шх} = a_0\cos\alpha - a = \frac{5}{7}\cdot\frac{4}{5}g - \frac{g}{7} = \frac{3}{7}g$, и действительно $m\cdot\frac{3}{7}g = 3m\cdot\frac{1}{7}g$. По вертикали шайба опускается с ускорением $a_0\sin\alpha = \frac{3}{7}g$ и проходит H: $H = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}g\,t_2^2$, то есть $t_2 = \sqrt{14H/(3g)}$ — совпало.



Траектория шайбы относительно стола (бирюзовая) — прямая под 45°: начальное положение клина штриховое, конечное — сплошное. Пока шайба съезжает на H по вертикали и на H по горизонтали, клин отъезжает на $H/3$.

Обратите внимание. На подвижном клине сила реакции не равна $mg\cos\alpha$: клин «уходит» из-под шайбы, и давление шайбы меньше.

Именно поэтому нельзя считать ускорение шайбы относительно клина равным $g\sin\alpha$, как в пункте 1: $a_0 = \frac{5}{7}g > \frac{3}{5}g$.

Проверка. Размерность: $\sqrt{H/g}$ — секунды. Предел $M \to \infty$: $a \to 0$, $a_0 \to g\sin\alpha$, и $t_2 \to t_1$ — тяжёлый клин не сдвигается. Здесь $t_2 = \sqrt{14/3}\sqrt{H/g} \approx 2{,}16\sqrt{H/g}$ меньше $t_1 = \frac{5}{3}\sqrt{2}\sqrt{H/g} \approx 2{,}36\sqrt{H/g}$: на подвижном клине шайба съезжает быстрее, потому что клин уходит в сторону. Смысл: свобода клина увеличивает ускорение шайбы относительно него, и поверхность «убегает» из-под шайбы.

Ответ. 1) $t_1 = \dfrac{5}{3}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$; 2) $a = \dfrac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha} = \dfrac{g}{7}$; 3) $t_2 = \sqrt{\dfrac{14H}{3g}}$.