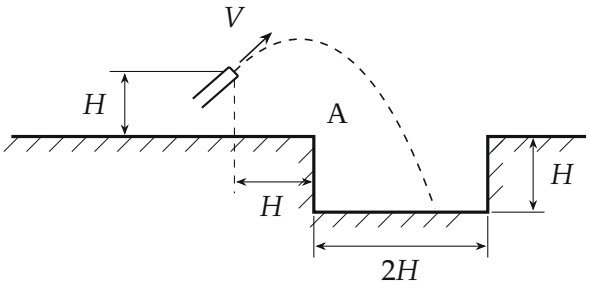
Наполнение бака водой из шланга

Задача 5. [Физтех 2020/21, 9 класс, задача 5] Из шланга хотят наполнить водой вкопанный в землю цилиндрический бак с вертикальной стенкой высотой H и радиусом дна H (см. рис.). Конец шланга находится на расстоянии H по вертикали и H по горизонтали от ближнего края бака. При выходе из шланга площадь поперечного сечения струи S, а скорость воды $V = \sqrt{0{,}5gH}$. Считать, что поперечные размеры струи при полёте воды значительно меньше H. Вода в струе движется в плоскости рисунка. Сопротивлением воздуха пренебречь.



1. За какое время бак заполнится водой, если струя попадает в бак?
2. Под каким углом к горизонту должна выходить струя воды из шланга, чтобы попасть в ближнюю верхнюю точку A бака? Можно найти значение тангенса угла.
3. Под какими углами к горизонту должна выходить струя воды из шланга, чтобы попасть в бак? Можно найти диапазон изменения тангенсов углов.

Справочная формула: $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

▲ **Решение. Что происходит.** Каждая частица воды после выхода из шланга летит как тело, брошенное под углом к горизонту, — это задача на баллистику. Струя — след таких частиц, то есть парабола. Первый пункт — про расход: сколько воды в секунду выходит из шланга. Во втором и третьем пунктах нужно понять, где парабола пересекает уровень верха бака. Главная идея: уравнение траектории удобно записать

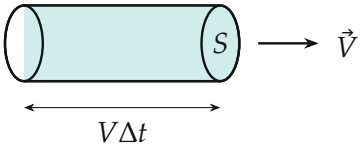
через $\operatorname{tg}\alpha$ — тогда условие «струя прошла через точку» даёт квадратное уравнение для тангенса.

Обозначения. α — угол вылета струи к горизонту, $k = \operatorname{tg}\alpha$; T — время заполнения; начало координат — в конце шланга, ось x горизонтально вправо, y — вертикально вверх. Тогда $A = (H; -H)$, дальний верхний край бака $B = (3H; -H)$.

Пункт 1.

1. Расход воды. За малое время Δt из шланга выходит цилиндр воды длиной $V\Delta t$ и сечением S, то есть объём $VS\,\Delta t$. Расход VS постоянен, и вся вода попадает в бак (по условию). Объём бака $\pi H^2 \cdot H$:

$$VS\,T = \pi H^3 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\pi H^3}{VS} = \frac{\pi H^3}{S\sqrt{0{,}5\,gH}} = \frac{\pi\sqrt{2}\,H^3}{S\sqrt{gH}}.$$

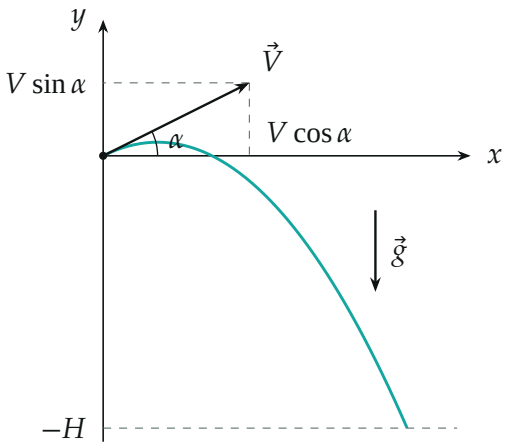


За время Δt через сечение струи у шланга проходит цилиндр воды объёмом $SV\Delta t$.

Пункт 2.

2. Уравнение траектории. Ускорение воды в полёте — $\vec{g}$, вниз. Кинематика равноускоренного движения по осям:

$$x = V\cos\alpha \cdot t, \qquad y = V\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$



Оси и начальная скорость струи (пример $k = 0{,}5$, траектория вычислена). Ускорение $\vec{g}$ — только по оси y, поэтому по x движение равномерное.

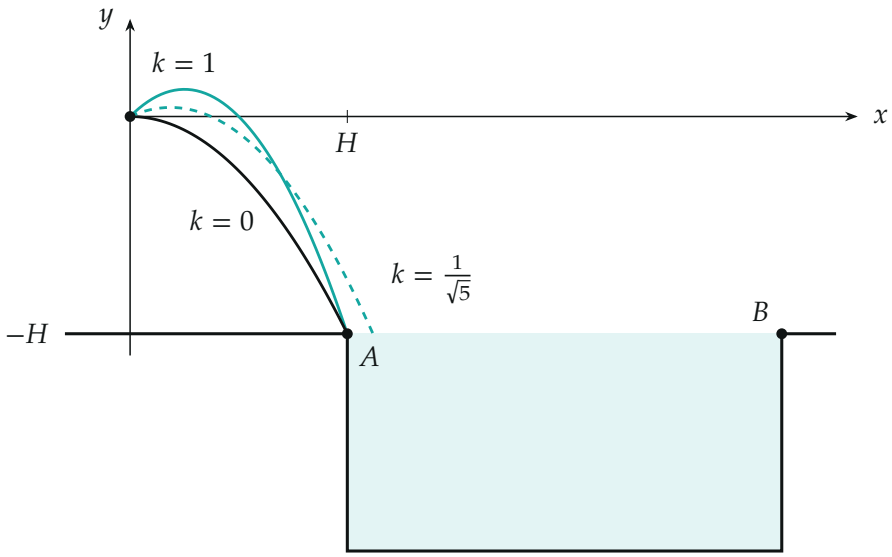
Исключим время $t = \dfrac{x}{V\cos\alpha}$ и подставим $V^2 = 0{,}5gH$, $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + k^2$:

$$y = kx - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha} = kx - \frac{(1+k^2)\,x^2}{H}.$$

3. Попадание в точку A. Подставим $x = H$, $y = -H$ и разделим на H:

$$-1 = k - (1 + k^2) \quad \Rightarrow \quad k^2 - k = 0, \qquad k = 1 \text{ или } k = 0.$$

Значит, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = 45°$; второй корень $\alpha = 0$ — горизонтальная струя, которая тоже приходит точно в A.



Траектории, вычисленные по уравнению шага 2 (масштаб точный): при $k = 1$ и $k = 0$ струя приходит ровно в A; при $k = 1/\sqrt{5}$ — дальше всего, на $\frac{\sqrt{5}}{2}H \approx 1{,}12H$. До дальнего края B ($3H$) ни одна струя не долетает.

Пункт 3.

4. Попадание в дальнюю точку B**.** Подставим $x = 3H$, $y = -H$:

$$-1 = 3k - 9(1 + k^2) \quad \Rightarrow \quad 9k^2 - 3k + 8 = 0, \qquad D = 9 - 4 \cdot 9 \cdot 8 < 0.$$

Корней нет: ни при каком угле струя до точки B не долетает. Значит, граница допустимых углов определяется только ближним краем A.

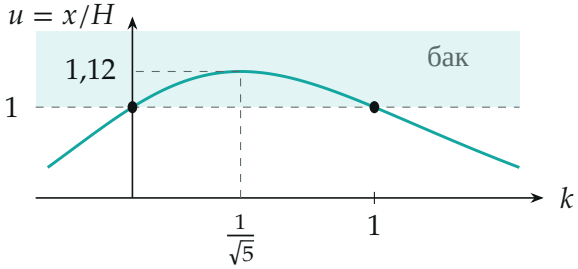
5. Где струя пересекает уровень верха бака. Пусть струя проходит уровень $y = -H$ в точке $x = uH$. Из уравнения траектории

$$(1 + k^2)u^2 - ku - 1 = 0, \qquad u = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4(1 + k^2)}}{2(1 + k^2)}$$

(берём положительный корень: струя летит вправо). Вода попадает в бак, если $1 < u < 3$; правое условие выполнено всегда (шаг 4). Условие $u > 1$: подставим $u = 1$ в левую часть — получим $1 + k^2 - k - 1 = k(k-1)$; парабола по u ветвями вверх, её положительный корень больше 1, когда

значение в $u = 1$ отрицательно:

$$k(k-1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < k < 1.$$



Где струя пересекает уровень верха бака в зависимости от $k = \operatorname{tg}\alpha$. Выше штриховой линии $u = 1$ (край A) — попадание в бак: при $0 < k < 1$.

6. Ответ на пункт 3. Струя попадает в бак при

$$0 < \operatorname{tg}\alpha < 1, \qquad 0 < \alpha < 45^\circ.$$

При $\operatorname{tg}\alpha$ ровно 0 или 1 струя бьёт в край A, при отрицательных углах и при $\alpha > 45^\circ$ — в землю перед баком.

Обратите внимание. В уравнении траектории $\cos^2\alpha$ в знаменателе надо выразить через тангенс, $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$ — иначе в одном уравнении окажутся и $\sin\alpha$, и $\cos\alpha$, и до квадратного уравнения не дойти.

Проверка. Размерность T: $\dfrac{\text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{м/с}} = \text{с}$. Точка A при $k = 1$: $t = \dfrac{H}{V\cos 45^\circ} = \sqrt{\dfrac{4H}{g}}$, $y = Vt\sin 45^\circ - \dfrac{gt^2}{2} = H - 2H = -H$ — верно. Дальность: при скорости $V = \sqrt{0{,}5gH}$ даже горизонтальная струя с высоты H улетает на $V\sqrt{2H/g} = H$ — ровно до края; наибольшая дальность на уровне бака $\dfrac{\sqrt{5}}{2}H$, поэтому вода падает в бак только у ближней стенки. Смысл: напор слабый, и «окно» углов узкое — от горизонтали до 45°.

Ответ. 1) $T = \dfrac{\pi H^3}{VS} = \dfrac{\pi\sqrt{2}\,H^3}{S\sqrt{gH}}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = 45^\circ$ (формально и $\alpha = 0$); 3) $0 < \operatorname{tg}\alpha < 1$, то есть $0 < \alpha < 45^\circ$.