Лёд в воде и добавленная вода

Задача 1. [Физтех 2020/21, 9 класс, задача 1] В сосуде с водой плавает кусок льда массой $M = 0{,}45$ кг. Система находится в тепловом равновесии. Плотность воды $\rho_0 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность льда $\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

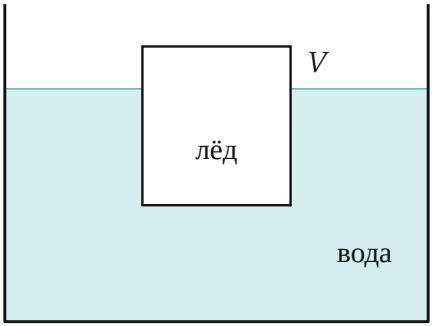
1. Найдите объём V надводной части льда.

В сосуд наливают воду при температуре $t_1 = 30\,^\circ$C. После установления теплового равновесия объём надводной части льда уменьшился на $V_1 = 25$ см^3.

2. Найдите массу m добавленной воды.

Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}36 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°C). Потери теплоты считайте пренебрежимо малыми.

Рисунка в условии нет. Поясняющий рисунок:



Лёд плавает в воде; над водой — часть объёмом V.

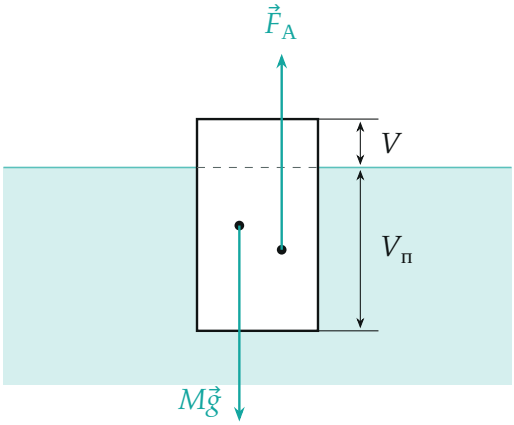
▲ **Решение. Что происходит.** В первой части — плавание: сила Архимеда уравновешивает вес льда, и это задаёт, какая доля льда под водой. Главное наблюдение: при той же плотности доля погружённого объёма от массы не зависит, поэтому надводный объём пропорционален массе льда. Во второй части — тепловой баланс: тёплая вода остывает и плавит часть льда. Лёд остался (он плавает и после), значит, конечная температура — 0 °C. Изменение надводного объёма сразу говорит, сколько льда растаяло.

Обозначения. $V_\text{п}$ — погружённый объём льда; M_1 — масса льда, оставшаяся после установления равновесия; $\Delta M = M - M_1$ — масса растаявшего льда; $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$ — температура плавления (начальная и конечная температура системы).

Пункт 1.

1. Условие плавания. Лёд покоится, по второму закону Ньютона сила тяжести уравновешена силой Архимеда, равной весу вытесненной воды:

$$Mg = \rho_0 g V_\text{п} \quad \Rightarrow \quad V_\text{п} = \frac{M}{\rho_0}.$$



Силы, действующие на лёд. Сила Архимеда $F_A = \rho_0 g V_n$ равна силе тяжести; погружена доля $\rho/\rho_0 = 0{,}9$ объёма.

2. Надводный объём. Весь объём льда M/ρ, поэтому

$$V = \frac{M}{\rho} - \frac{M}{\rho_0} = \frac{M}{\rho}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{0{,}45}{900} \cdot 0{,}1\ \text{м}^3 = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^3 = 50\ \text{см}^3.$$

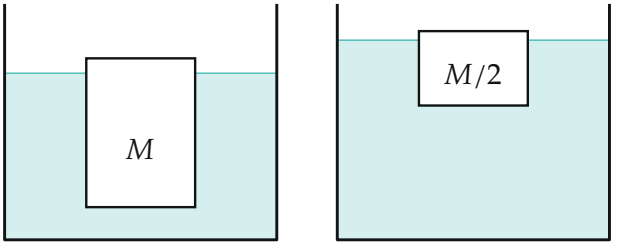
Надводный объём пропорционален массе льда: $V = M\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)$, коэффициент — постоянный.

Пункт 2.

3. Сколько льда растаяло. После добавления воды надводный объём стал $V - V_1 = 25$ см^3, то есть уменьшился вдвое. Формула шага 2 верна для любой массы плавающего льда, значит, и масса льда уменьшилась вдвое:

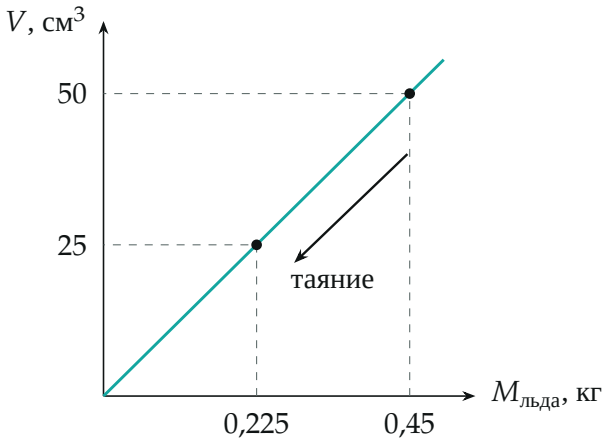
$$M_1 = M \cdot \frac{V - V_1}{V} = \frac{M}{2}, \qquad \Delta M = M - M_1 = \frac{M}{2} = 0{,}225 \text{ кг}.$$

Уровень воды в сосуде при этом может измениться, но надводный объём от уровня не зависит — только от массы льда.



до: над водой 50 см^3 после: над водой 25 см^3

До и после: льда стало вдвое меньше, и вдвое меньше стал надводный объём (уровень воды поднялся — добавили воду).



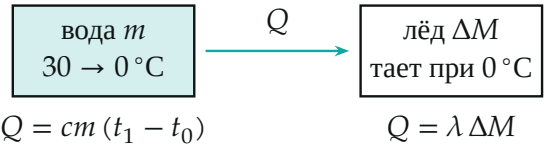
Надводный объём пропорционален массе плавающего льда (масштаб по осям точный). Уменьшение надводного объёма вдвое означает, что растаяла половина льда.

4. Конечная температура. В конце лёд ещё есть и находится в тепловом равновесии с водой, а лёд с водой при нормальном давлении сосуществуют только при 0 °C. Значит, добавленная вода остыла от $t_1 = 30\,^\circ\text{C}$ до $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$, а исходная вода и лёд и были при 0 °C — им нагреваться не нужно.

5. Уравнение теплового баланса. Потерь нет, поэтому теплота, отданная добавленной водой при остывании, целиком идёт на плавление льда (растаявший лёд остаётся водой при 0 °C):

$$cm\,(t_1 - t_0) = \lambda\,\Delta M \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\lambda\,\Delta M}{c\,(t_1 - t_0)} = \frac{0{,}5\,M\lambda}{c\,(t_1 - t_0)}.$$

$$m = \frac{0{,}225 \cdot 3{,}36 \cdot 10^5}{4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 30}\ \text{кг} = \frac{75\,600}{126\,000}\ \text{кг} = 0{,}6\ \text{кг}.$$



Тепловой баланс: вся теплота остывающей добавленной воды уходит на плавление половины льда.

Обратите внимание. Нельзя считать, что конечная температура выше нуля: тогда растаял бы весь лёд, а он плавает и после. И не нужно учитывать нагрев исходной воды — она уже была при 0 °C.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Дж/кг} \cdot \text{кг}}{\text{Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{C)} \cdot {}^\circ\text{C}} = \text{кг}$. Оценка в обратную сторону: 0,6 кг воды при остывании на 30° отдают $4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6 \cdot 30 \approx 7{,}6 \cdot 10^4$ Дж, а плавление 0,225 кг льда требует $3{,}36 \cdot 10^5 \cdot 0{,}225 \approx 7{,}6 \cdot 10^4$ Дж — сходится. Чтобы растопить весь лёд, понадобилось бы вдвое больше воды, 1,2 кг. Смысл: надводная часть льда — «весы», показывающие массу льда, а растаявшая масса — мера отданной теплоты.

Ответ. 1) $V = \dfrac{M}{\rho}\left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_0}\right) = 50$ см^3; 2) $m = \dfrac{0{,}5\,M\lambda}{c\,(t_1 - t_0)} = 0{,}6$ кг.