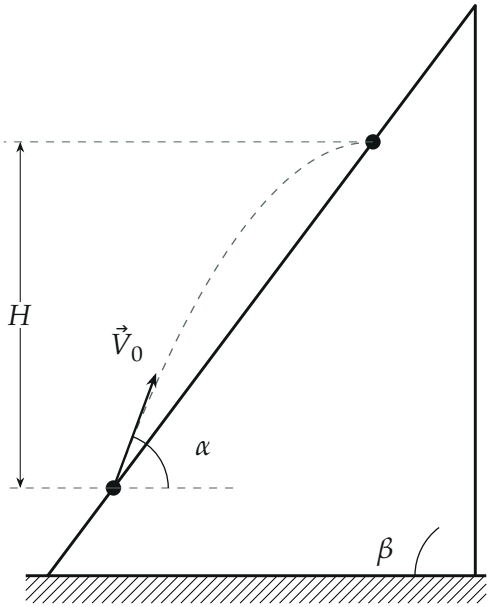
Мешочек с песком и гладкая наклонная плоскость

Задача 3. [Физтех 2020/21, 9 класс, задача 3] С гладкой наклонной плоскости бросают тряпичный мешочек, наполненный песком. Вектор начальной скорости $V_0 = 12$ м/с образует с горизонтальной плоскостью угол α, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}$. Мешочек перед столкновением с плоскостью движется горизонтально, после столкновения безотрывно скользит по плоскости. Движение мешочка по плоскости прямолинейное.

1. На какой высоте H, отсчитанной от точки старта, мешочек сталкивается с плоскостью?
2. Найдите $\operatorname{tg}\beta$, здесь β — угол, который наклонная плоскость образует с горизонтом.
3. Через какое время T после падения на плоскость мешочек остановится?
4. Если наклонная плоскость шероховатая, то при каких значениях коэффициента трения скольжения мешочек не будет перемещаться по плоскости?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой. Действием силы тяжести в процессе столкновения пренебрегите.



Поясняющий рисунок: мешочек стартует с плоскости, летит по параболе и ударяется о плоскость в верхней точке траектории.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на полёт тела, брошенного под углом к горизонту, и неупругий удар о плоскость. Слова «перед столкновением движется горизонтально» — главная подсказка: мешочек ударяется о плоскость в *верхней точке* траектории. Отсюда сразу высота и положение точки удара, а значит, и наклон плоскости. Тряпичный мешочек с песком не отскакивает: при ударе нормальная к плоскости составляющая скорости гасится, касательная (на гладкой плоскости) сохраняется. Дальше — равнозамедленное скольжение вверх по склону.

Обозначения. Ось x — горизонтально в сторону полёта, ось y — вертикально вверх, начало — точка старта O; P — точка удара; L — горизонтальное смещение до удара; $\sin\alpha = \dfrac{8}{\sqrt{73}}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{73}}$; u — скорость мешочка перед ударом.

Пункт 1.

1. Полёт. В полёте на мешочек действует только сила тяжести, поэтому $a_x = 0$, $a_y = -g$: горизонтальная проекция скорости постоянна,

$V_x = V_0 \cos\alpha$, а вертикальная $V_y = V_0 \sin\alpha - gt$ убывает. Скорость горизонтальна, когда $V_y = 0$, — в верхней точке, через $t_1 = \dfrac{V_0 \sin\alpha}{g}$. Высоту подъёма даёт закон изменения вертикальной скорости $V_y^2 - V_{0y}^2 = -2gH$:

$$H = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{V_0^2}{2g} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{144}{20} \cdot \frac{64}{73} \approx 6{,}3 \text{ м}.$$

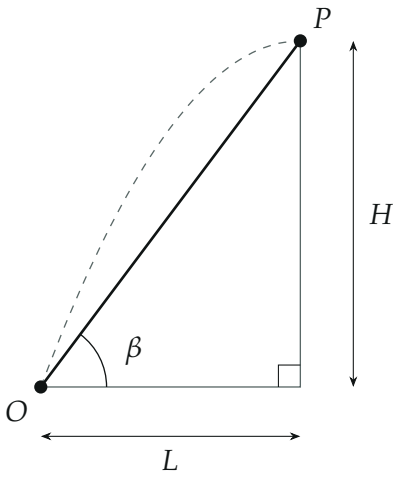
Пункт 2.

2. Где плоскость. И точка старта O, и точка удара P лежат на плоскости, поэтому $\operatorname{tg}\beta = H/L$. Горизонтальное смещение за время t_1:

$$L = V_0 \cos\alpha \cdot t_1 = \frac{V_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \approx 4{,}7 \text{ м},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{L} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{4}{3}.$$

Значит, $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$.



Точки старта O и удара P обе лежат на плоскости, поэтому наклон плос-

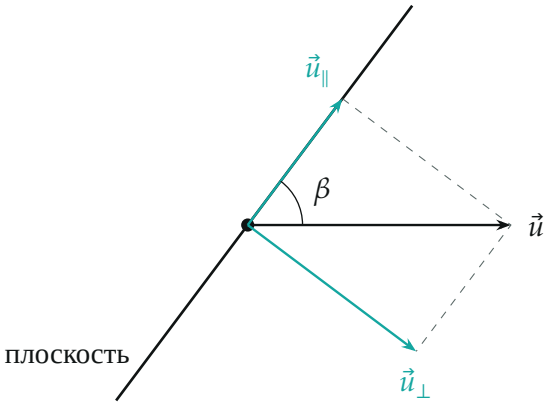
кости $\operatorname{tg}\beta = H/L$. *Масштаб вычисленный:* $H \approx 6{,}3$ *м*, $L \approx 4{,}7$ *м.*

Пункт 3.

3. Удар. Перед ударом скорость горизонтальна и равна $u = V_0 \cos\alpha = \dfrac{36}{\sqrt{73}} \approx 4{,}21$ м/с. Разложим её на составляющую вдоль плоскости (вверх по склону) и по нормали к ней (в плоскость):

$$u_{\parallel} = u\cos\beta, \qquad u_{\perp} = u\sin\beta.$$

Во время удара на мешочек действуют только сила реакции плоскости (по нормали: плоскость гладкая) и сила тяжести, которой по условию пренебрегаем. Значит, импульс мешочка вдоль плоскости при ударе не меняется: $u_{\parallel}$ сохраняется. Мешочек «прилипает» к плоскости (скользит безотрывно) — нормальная составляющая $u_{\perp}$ гасится.



Скорость перед ударом раскладываем по направлениям вдоль плоскости и по нормали к ней. После удара остаётся только $\vec{u}_{\parallel}$.

4. Скольжение вверх. После удара на мешочек действуют $m\vec{g}$ и $\vec{N}$. Второй закон Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ в проекции на ось x' вдоль склона вверх (по скорости; N на неё не проецируется):

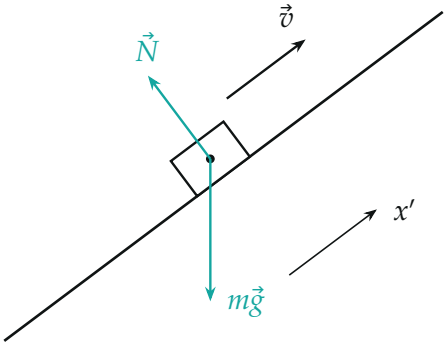
$$ma_{x'} = -mg\sin\beta \quad \Rightarrow \quad a_{x'} = -g\sin\beta = -8 \text{ м/с}^2.$$

Мешочек движется равнозамедленно, его скорость $v = u\cos\beta - g\sin\beta\cdot t$

обращается в нуль через

$$T = \frac{u\cos\beta}{g\sin\beta} = \frac{V_0\cos\alpha}{g\,\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{12\cdot 3/\sqrt{73}}{10\cdot 4/3} \approx 0{,}32\text{ с} \approx 0{,}3\text{ с}.$$

На гладкой плоскости он затем соскользнёт обратно, но вопрос — о первой остановке.



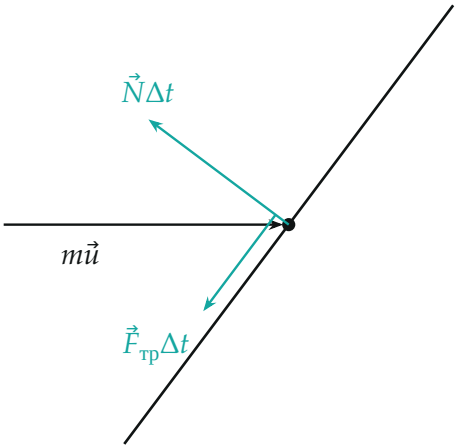
Тело m после удара: силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$, ось x' вдоль склона вверх, по скорости.

Пункт 4.

5. Удар о шероховатую плоскость. Теперь при ударе действует ещё сила трения. Чтобы мешочек вообще не двигался по плоскости, нужны два условия: он должен остановиться *уже при ударе* и потом остаться в покое.

Остановка при ударе. За короткое время удара Δt плоскость гасит нормальную составляющую импульса $mu\sin\beta$ импульсом силы реакции: $N\Delta t = mu\sin\beta$ (сила тяжести мала по сравнению с ударными силами). Сила трения скольжения не больше μN, поэтому её импульс вдоль плоскости не больше $\mu N\Delta t = \mu mu\sin\beta$. Касательный импульс $mu\cos\beta$ погасится, если

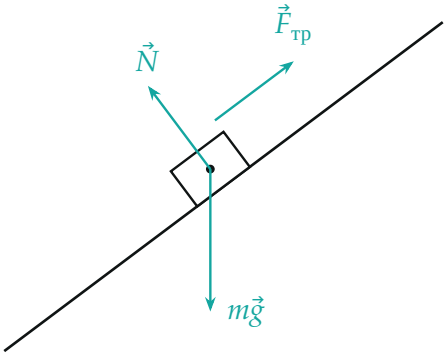
$$\mu\, mu\sin\beta \geq mu\cos\beta \quad\Rightarrow\quad \mu \geq \frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{3}{4}.$$



Импульсы сил при ударе о шероховатую плоскость: нормальная реакция гасит $mu\sin\beta$*, трение вдоль склона вниз — не больше* $\mu N\Delta t$.

Покой после удара. На неподвижный мешочек действуют $m\vec{g}$, $\vec{N}$ и сила трения покоя вверх по склону. В проекциях на склон и нормаль: $F_{\text{тр}} = mg\sin\beta$, $N = mg\cos\beta$. Трение покоя не больше μN:

$$mg\sin\beta \le \mu mg\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}.$$



Мешочек в покое на шероховатом склоне: трение покоя направлено вверх по склону и уравновешивает скатывающую составляющую $mg\sin\beta$.

Оба условия выполнены при $\mu \geq \frac{4}{3}$ (второе сильнее первого, так как $\frac{4}{3} > \frac{3}{4}$). При $\frac{3}{4} \leq \mu < \frac{4}{3}$ мешочек остановится при ударе, но потом съедет вниз.

Обратите внимание. Условие «не будет перемещаться по плоскости» содержит две проверки: мгновенная остановка при ударе (здесь работает трение при большой ударной силе N) и покой после удара. Если проверить только вторую, ответ случайно совпадёт, но при другом наклоне ($\operatorname{tg}\beta < 1$) решающим стало бы первое условие.

Проверка. Размерности: V_0^2/g — метры, V_0/g — секунды. Второй способ для H: по закону сохранения энергии $\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + mgH$, откуда $H = \frac{V_0^2(1-\cos^2\alpha)}{2g}$ — то же. Наклон $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$: верхняя точка параболы всегда видна из точки старта под углом, тангенс которого вдвое меньше тангенса угла броска.

Ответ. 1) $H = \dfrac{V_0^2}{2g} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \approx 6{,}3$ м; 2) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2} = \dfrac{4}{3}$; 3) $T = \dfrac{V_0 \cos\alpha}{g \operatorname{tg}\beta} \approx 0{,}3$ с; 4) $\mu \geq \operatorname{tg}\beta = \dfrac{4}{3}$.