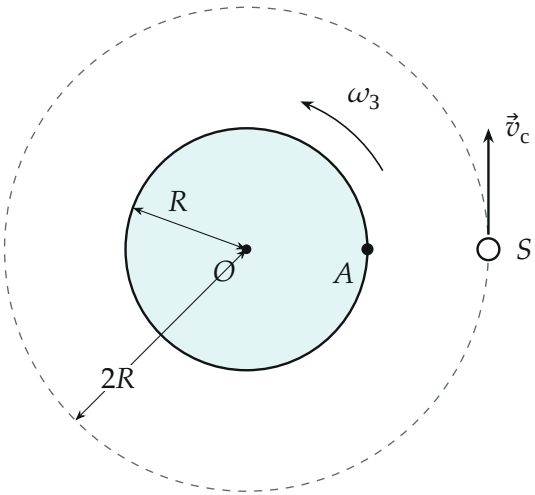
Спутник и наблюдатель на экваторе

Задача 4. [Физтех 2020/21, 9 класс, задача 4] Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите в плоскости экватора в том же направлении, что и точки на экваторе. Радиус орбиты спутника в два раза больше радиуса Земли $R = 6400$ км. Ускорение свободного падения у поверхности планеты $g = 10$ м/с^2.

1. Найдите период T обращения спутника.

В некоторый момент времени расстояние от наблюдателя на экваторе до спутника наименьшее.

2. Через какое время T_1 расстояние между наблюдателем и спутником впервые будет расти с наибольшей скоростью?
3. Найдите эту скорость V.



Поясняющий рисунок: Земля, наблюдатель A на экваторе и спутник S на орбите радиуса $2R$ в момент наименьшего расстояния $AS = R$. Вращение — против часовой стрелки.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение спутника по круговой орбите и на относительное движение. Период находим из второго закона Ньютона для спутника: сила тяготения сообщает ему центростремительное ускорение. Спутник на орбите $2R$ обходит Землю быстрее,

чем вращается экватор, поэтому наблюдатель от него отстаёт. Главная идея — перейти в систему отсчёта, вращающуюся вместе со спутником: в ней спутник неподвижен, а наблюдатель равномерно движется по окружности радиуса R. Расстояние между двумя точками одинаково во всех системах отсчёта, поэтому и скорость его изменения можно искать в этой удобной системе.

Обозначения. M — масса Земли, O — её центр, A — наблюдатель, S — спутник; $T_3 = 24$ ч $= 8{,}64 \cdot 10^4$ с — период вращения Земли; θ — угол $\angle AOS$; $d = AS$.

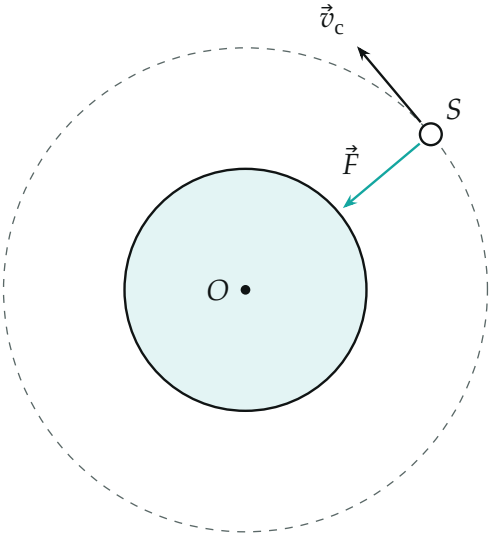
Пункт 1.

1. Период спутника. На спутник действует только сила тяготения, направленная к центру Земли. Второй закон Ньютона в проекции на радиус к центру:

$$m\omega_c^2 \cdot 2R = \frac{GMm}{(2R)^2}.$$

Массу Земли выразим через g: у поверхности $mg = \dfrac{GMm}{R^2}$, то есть $GM = gR^2$. Тогда

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{8R}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi\sqrt{\frac{8R}{g}} = 4\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 1{,}42 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 3{,}9 \text{ ч}.$$



Спутник на орбите: сила тяготения $\vec{F}$ направлена к центру Земли и сообщает центростремительное ускорение.

Пункт 2.

2. Система отсчёта спутника. Перейдём в систему, вращающуюся с угловой скоростью спутника $\omega_c = 2\pi/T$ вокруг оси Земли. Зачем: в ней спутник неподвижен, и расстояние d меняется только из-за движения наблюдателя. Земля вращается с угловой скоростью $\omega_З = 2\pi/T_З$ в ту же сторону, поэтому в этой системе наблюдатель движется *назад* с угловой скоростью

$$\omega = \omega_c - \omega_З = 2\pi\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_З}\right) \approx 3{,}69 \cdot 10^{-4}\ \text{с}^{-1},$$

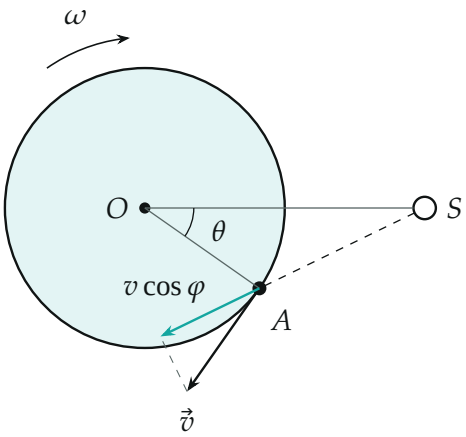
по окружности радиуса R, со скоростью $v = \omega R$. В начальный момент d наименьшее — наблюдатель на отрезке OS, $\theta = 0$.

3. Скорость изменения расстояния. Скорость роста расстояния d — это проекция скорости наблюдателя $\vec{v}$ на направление от спутника к наблюдателю (составляющая $\vec{v}$ поперёк прямой SA поворачивает отрезок,

но не меняет его длину):

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = v\cos\varphi,$$

где φ — угол между $\vec{v}$ и прямой SA. Модуль v постоянен, поэтому наибольшая скорость роста v получается при $\varphi = 0$: скорость наблюдателя направлена вдоль прямой SA от спутника.

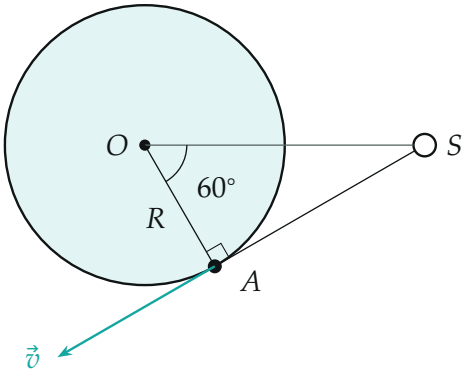


Система отсчёта спутника: спутник S неподвижен, наблюдатель A движется по часовой стрелке со скоростью $v = \omega R$. Длину SA меняет только проекция $\vec{v}$ на прямую SA (бирюзовая).

4. Где это происходит. Скорость наблюдателя направлена по касательной к окружности радиуса R. Значит, в нужный момент прямая SA касается этой окружности, и треугольник OAS прямоугольный с прямым углом при A:

$$\cos\theta = \frac{OA}{OS} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}, \qquad \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

До этого момента угол между $\vec{v}$ и SA уменьшается, после — растёт, так что это первый максимум.



Момент наибольшей скорости роста: прямая SA касается окружности, $\angle OAS = 90°$, $\cos\theta = R/2R$.

5. Время. Наблюдатель поворачивается на угол $\pi/3$ с угловой скоростью ω:

$$T_1 = \frac{\pi/3}{\omega} = \frac{1}{6}\cdot\frac{T\,T_3}{T_3 - T} \approx \frac{1{,}0472}{3{,}69\cdot 10^{-4}}\ \text{с} \approx 2{,}8\cdot 10^3\ \text{с} \approx 47\ \text{мин}.$$

Пункт 3.

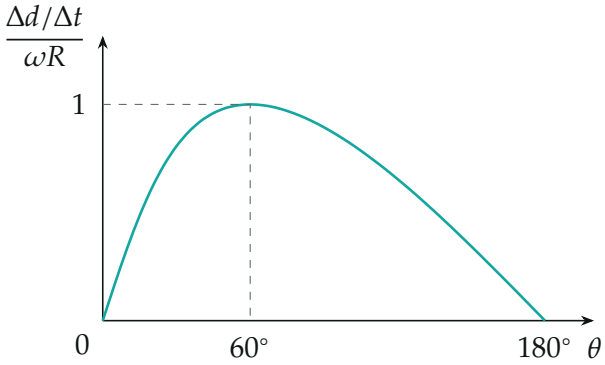
6. Скорость. В этот момент вся скорость наблюдателя идёт на удаление от спутника:

$$V = \omega R = 2\pi\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_3}\right)R \approx 3{,}69\cdot 10^{-4}\cdot 6{,}4\cdot 10^6\ \text{м/с} \approx 2{,}4\cdot 10^3\ \text{м/с}.$$

7. Второй способ — через формулу для d. По теореме косинусов $d^2 = R^2 + 4R^2 - 4R^2\cos\theta$, $d = R\sqrt{5 - 4\cos\theta}$. За малое время Δt угол растёт на $\omega\Delta t$, и

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \omega R\cdot\frac{2\sin\theta}{\sqrt{5 - 4\cos\theta}}.$$

При $\theta = 60°$ дробь равна $\dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = 1$ — это и есть её наибольшее значение (график ниже построен по вычисленным точкам): $\Delta d/\Delta t = \omega R$, как в шаге 6.



Скорость роста расстояния (в единицах ωR) в зависимости от угла поворота наблюдателя. Максимум — при $\theta = 60°$.

Обратите внимание. Вращение Земли нельзя отбрасывать: наблюдатель на экваторе сам движется со скоростью около 465 м/с. Если считать Землю неподвижной, получилось бы $T_1 = T/6 \approx 2{,}4 \cdot 10^3$ с и $V = 2\pi R/T \approx 2{,}8 \cdot 10^3$ м/с — заметно другие числа.

Проверка. Размерность: $\sqrt{R/g}$ — секунды, ωR — м/с. Предел: если бы спутник был геостационарным ($T = T_3$), то $\omega = 0$, расстояние не менялось бы, $T_1 \to \infty$, $V = 0$ — формулы это дают. Смысл: относительно спутника наблюдатель «откатывается» по экватору, и быстрее всего удаляется, когда смотрит на спутник у самого горизонта.

Ответ. 1) $T = 4\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}} \approx 1{,}4 \cdot 10^4$ с; 2) $T_1 = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{T\,T_3}{T_3 - T} \approx 2{,}8 \cdot 10^3$ с; 3) $V = 2\pi\left(\dfrac{1}{T} - \dfrac{1}{T_3}\right)R \approx 2{,}4 \cdot 10^3$ м/с.