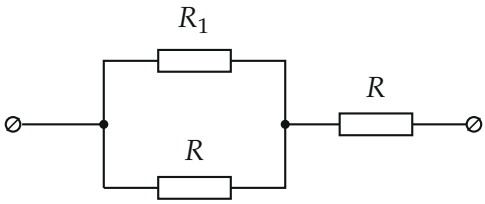
Резисторы и максимальная мощность на подключённом

Задача 5. [Физтех 2020/21, 9 класс, задача 5] Два одинаковых резистора соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения $U = 6$ В. В такой цепи рассеивается мощность $P = 1$ Вт.

1. Найдите сопротивление R каждого резистора.

К одному из резисторов подключают параллельно (см. рис.) резистор с таким сопротивлением R_1, что на подключённом резисторе рассеивается максимальная мощность.



2. Найдите сопротивление R_1.
3. Найдите максимальную мощность $P_{\max}$, рассеивающуюся на резисторе R_1.

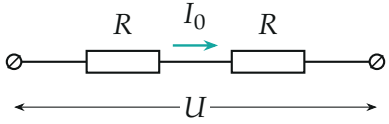
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на мощность в цепи постоянного тока и поиск максимума. Сначала по мощности цепи находим сопротивление резисторов. Затем к одному из них подключают R_1. Если R_1 очень мало, на нём почти нет напряжения; если очень велико — почти нет тока. В обоих крайних случаях мощность на R_1 близка к нулю, значит, при каком-то промежуточном R_1 она максимальна. Найдём мощность как функцию R_1 и её максимум.

Обозначения. I — ток через последовательно включённый резистор R (общий ток цепи); U_1 — напряжение на параллельном участке (R_1 и R); P_1 — мощность на R_1.

Пункт 1.

1. Сопротивление. Резисторы соединены последовательно, общее сопротивление $2R$. Мощность всей цепи по закону Джоуля — Ленца

$$P = \frac{U^2}{2R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U^2}{2P} = \frac{36}{2 \cdot 1}\ \text{Ом} = 18\ \text{Ом}.$$



Пункт 1: два одинаковых резистора последовательно, на всей цепи напряжение U.

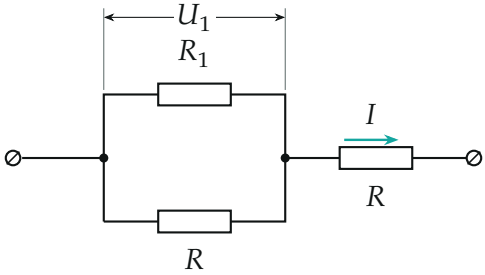
Пункт 2.

2. Мощность на R_1. Сопротивление параллельного участка $R_\parallel = \dfrac{RR_1}{R + R_1}$. Ток во всей цепи по закону Ома

$$I = \frac{U}{R + R_\parallel}, \qquad U_1 = IR_\parallel = \frac{UR_\parallel}{R + R_\parallel} = \frac{UR_1}{R + 2R_1}$$

(числитель и знаменатель умножили на $R + R_1$). Мощность на R_1:

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{U^2 R_1}{(R + 2R_1)^2} = \frac{U^2}{\dfrac{R^2}{R_1} + 4R + 4R_1}.$$



Цепь с подключённым R_1: общий ток I проходит через правый резистор R и делится между R_1 и параллельным ему R; напряжение на участке — U_1.

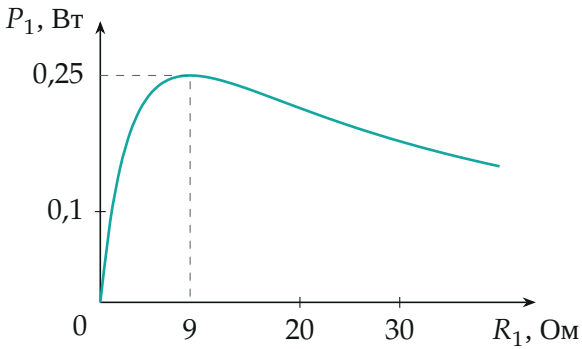
3. Максимум. В знаменателе меняются только слагаемые $\dfrac{R^2}{R_1} + 4R_1$. Их произведение постоянно ($4R^2$), поэтому сумма наименьшая, когда они равны (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим):

$$\frac{R^2}{R_1} = 4R_1 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{R}{2} = 9 \text{ Ом}.$$

Пункт 3.

4. Максимальная мощность. Подставим $R_1 = R/2$:

$$P_{\max} = \frac{U^2}{2R + 4R + 2R} = \frac{U^2}{8R} = \frac{P}{4} = 0{,}25 \text{ Вт}.$$

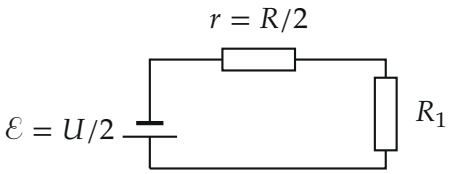


Мощность на R_1 в зависимости от его сопротивления, построена по формуле шага 2 при $U = 6$ В, $R = 18$ Ом. Максимум 0,25 Вт при $R_1 = 9$ Ом.

5. Второй способ — эквивалентный источник. Всё, что подключено к R_1, можно заменить одним источником. Если R_1 отключить, на параллельном ему резисторе R (делитель из двух R) напряжение $\mathcal{E} = U/2$. Если вместо R_1 поставить перемычку, ток через неё U/R. Отношение $r = \mathcal{E}/(U/R) = R/2$ — внутреннее сопротивление эквивалентного ис-

точника. Мощность на нагрузке, подключённой к источнику с внутренним сопротивлением r, максимальна при сопротивлении нагрузки, равном r:

$$R_1 = r = \frac{R}{2}, \qquad P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{U^2/4}{2R} = \frac{U^2}{8R} \text{ — то же.}$$



Эквивалентная схема: для резистора R_1 остальная цепь — источник с ЭДС $U/2$ и внутренним сопротивлением $R/2$.

Обратите внимание. Ищем максимум мощности именно на R_1, а не во всей цепи и не на параллельном участке. Мощность всей цепи $U^2/(R + R_{\parallel})$ растёт при уменьшении R_1 и максимума при $R_1 = R/2$ не имеет.

Проверка. Размерность: U^2/R — ватты. Пределы: $R_1 \to 0$ и $R_1 \to \infty$ дают $P_1 \to 0$, как и ожидалось. Сумма мощностей при $R_1 = 9$ Ом: ток $I = U/(R+6) = 0{,}25$ А, на правом R — 1,125 Вт, на участке $U_1 = 1{,}5$ В: на R_1 — 0,25 Вт, на параллельном R — 0,125 Вт; всего 1,5 Вт $= UI$, сходится. Смысл: нагрузка получает наибольшую мощность, когда её сопротивление равно сопротивлению остальной цепи, «видимому» с её зажимов.

Ответ. 1) $R = \dfrac{U^2}{2P} = 18$ Ом; 2) $R_1 = \dfrac{R}{2} = 9$ Ом; 3) $P_{\max} = \dfrac{U^2}{8R} = \dfrac{P}{4} = 0{,}25$ Вт.