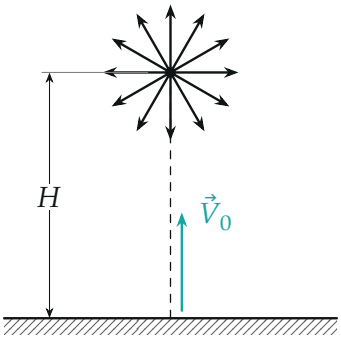
Разрыв фейерверка на осколки

Задача 1. [Физтех 2021/22, 10 класс, варианты 10-01–10-02, задача 1] Фейерверк массой $m = 2$ кг стартует после мгновенной работы двигателя с горизонтальной поверхности, летит вертикально вверх и разрывается в высшей точке траектории на множество осколков, которые летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по величине скоростями. Высота точки разрыва $H = 65$ м. На землю осколки падают в течение $\tau = 10$ с.

1. Найдите начальную скорость V_0 фейерверка.
2. Найдите суммарную кинетическую энергию K осколков сразу после взрыва.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.



Поясняющий рисунок: подъём с $\vec{V}_0$ на высоту H и разлёт осколков с одинаковыми по модулю скоростями.

▲ **Решение. Что происходит.** Два этапа. Сначала фейерверк — одно тело — летит вверх только под действием силы тяжести и в высшей точке останавливается: это свободное падение «наоборот», и V_0 найдём из закона сохранения механической энергии. Затем разрыв: осколки вылетают из одной точки с одной и той же скоростью u во все стороны и дальше движутся независимо, каждый с ускорением $\vec{g}$. Главная идея второго пункта — раньше всех упадёт осколок, брошенный вертикально вниз,

позже всех — брошенный вертикально вверх, а разница их времён полёта зависит только от u и g, но не от высоты. Это задача на кинематику броска с ускорением $\vec{g}$ плюс энергия осколков.

Обозначения. u — модуль скорости каждого осколка сразу после взрыва, m_i — масса i-го осколка, $\sum m_i = m$. Ось y — вертикально вверх, начало — на земле.

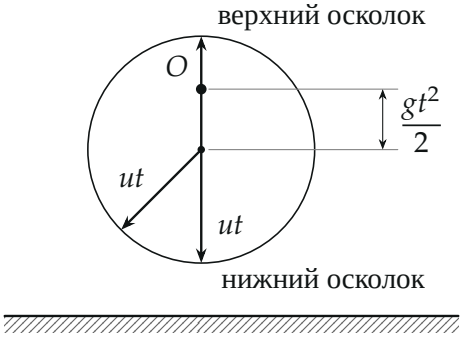
Пункт 1.

1. Закон сохранения механической энергии для фейерверка от старта до высшей точки. Работает только сила тяжести (двигатель отработал мгновенно, воздуха нет), поэтому механическая энергия сохраняется. В высшей точке вертикального подъёма скорость равна нулю:

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgH \quad \Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 65} = 10\sqrt{13} \approx 36 \text{ м/с}.$$

Пункт 2.

2. Какие осколки падают первым и последним. Ускорение у всех осколков одно и то же, $\vec{g}$. Перейдём мысленно в систему отсчёта, свободно падающую вместе с точкой разрыва (зачем: в ней тяжести «нет», и осколки летят прямолинейно и равномерно). В ней осколки в любой момент t лежат на сфере радиуса ut с центром в точке разрыва, а сама эта сфера в системе земли падает с ускорением g. Первым земли касается нижний край сферы — осколок, брошенный вертикально вниз, последним — верхний край, осколок, брошенный вертикально вверх. Время τ — это разница времён полёта этих двух осколков.

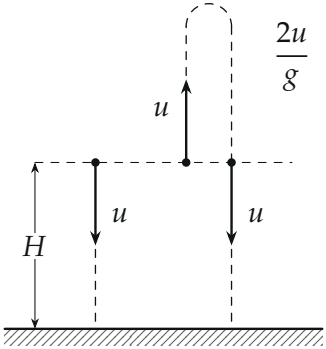


Осколки в момент t лежат на сфере радиуса ut, центр которой опустился от точки разрыва O на $gt^2/2$. Нижняя точка сферы достигает земли первой, верхняя — последней.

3. Разница времён полёта. Закон движения осколка, брошенного вверх со скоростью u: $y = H + ut - \dfrac{gt^2}{2}$. Через время $\dfrac{2u}{g}$ он снова проходит точку разрыва, и его скорость там u, направленная вниз (на одной высоте при движении только под действием тяжести модуль скорости одинаков, закон сохранения энергии). С этого момента он движется *в точности* как осколок, сразу брошенный вниз со скоростью u, и падает на землю спустя то же время. Значит, верхний осколок падает позже нижнего ровно на

$$\tau = \frac{2u}{g} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{g\tau}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ м/с}.$$

Высота H в эту разницу не входит.



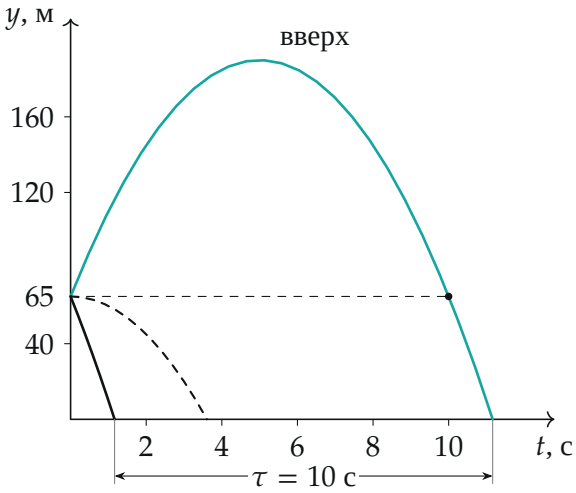
Осколок, брошенный вверх (справа, путь вверх и вниз разнесён для наглядности), через $2u/g$ возвращается на высоту H со скоростью u вниз — дальше его движение совпадает с движением осколка, брошенного вниз (слева).

4. Закон сохранения энергии для осколков. Каждый осколок сразу после взрыва имеет скорость u, поэтому

$$K = \sum \frac{m_i u^2}{2} = \frac{u^2}{2} \sum m_i = \frac{mu^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{g\tau}{2}\right)^2 = \frac{2}{2} \cdot 50^2 = 2500 \text{ Дж}.$$

Как распределены массы между осколками — неважно: скорость у всех одна.

Проверка вторым способом — графики. Решим уравнения движения численно. Осколок вниз: $65 = 50t + 5t^2$, $t_\downarrow = -5 + \sqrt{38} \approx 1{,}16$ с. Осколок вверх: $0 = 65 + 50t - 5t^2$, $t_\uparrow = 5 + \sqrt{38} \approx 11{,}16$ с. Разница $t_\uparrow - t_\downarrow = 10{,}00$ с $= \tau$. Горизонтальный осколок падает за $\sqrt{2H/g} \approx 3{,}6$ с — между ними.



Высота осколков, брошенных вверх (бирюзовая), вниз (чёрная) и горизонтально (пунктир), — по точкам из уравнений движения. Точка на штриховой прямой $y = H$ — верхний осколок возвращается на высоту разрыва в момент $2u/g = 10$ с; дальше его график — график нижнего осколка, сдвинутый на 10 с.

Обратите внимание. Импульс при разрыве сохраняется (до разрыва фейерверк покоился, и сумма $\sum m_i \vec{u}_i = 0$), но кинетическая энергия — нет: её дают химические силы взрыва. Поэтому K находим не из законов сохранения при взрыве, а из кинематики полёта осколков.

Проверка. Размерность: $\frac{m}{2}\left(\frac{g\tau}{2}\right)^2$ — кг·м^2/с^2 = Дж. Предел: при $u \to 0$ все осколки падают одновременно, $\tau \to 0$ — верно. Смысл: разброс времени падения 10 с означает скорость разлёта 50 м/с, и за неё взрыв отдал осколкам 2,5 кДж.

Ответ. 1) $V_0 = \sqrt{2gH} = 10\sqrt{13} \approx 36$ м/с; 2) $K = \frac{m}{2}\left(\frac{g\tau}{2}\right)^2 =$ 2500 Дж.