Шайба на подвижном клине

Задача 2. [Физтех 2021/22, 10 класс, варианты 10-01–10-02, задача 2] На гладкой горизонтальной поверхности расположен клин. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Шайбе, находящейся на наклонной поверхности клина, сообщают начальную скорость $V_0 = 2$ м/с (см. рис.), далее шайба безотрывно скользит по клину. Массы шайбы и клина одинаковы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

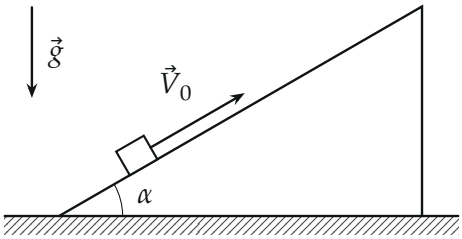


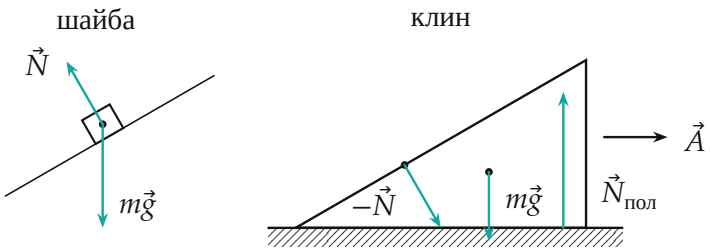
Рисунок условия.

1. На какую максимальную высоту H над точкой старта поднимется шайба на клине?
2. Найдите скорость V клина, в тот момент, когда шайба вернется в точку старта на клине. Массы шайбы и клина одинаковы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Шайба въезжает на клин, давит на него и разгоняет его вправо; поднявшись, она останавливается *относительно клина* и съезжает обратно. Это задача на законы сохранения в системе «шайба + клин»: внешние силы (тяжесть и реакция гладкого пола) вертикальны, поэтому сохраняется горизонтальная проекция импульса; трения нет, поэтому сохраняется механическая энергия. Для второго пункта нужна ещё одна идея: движение шайбы относительно клина — равнозамедленное, потом равноускоренное вдоль наклонной плоскости, и в точку старта шайба возвращается с той же по модулю относительной скоростью V_0, направленной вниз по склону.

Обозначения. m — масса шайбы и клина. Ось x — горизонтально вправо (в сторону подъёма), ось y — вверх. V_1 — общая скорость шай-

бы и клина в момент наибольшего подъёма, V — скорость клина, V_x — горизонтальная проекция скорости шайбы при возвращении.



Силы на шайбу и на клин (нарисованы порознь): на шайбу — $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ (перпендикулярно склону), на клин — $m\vec{g}$, сила $-\vec{N}$ от шайбы (третий закон Ньютона, в точке под шайбой) и $\vec{N}_{пол}$. Горизонтальная часть $-\vec{N}$ разгоняет клин вправо с ускорением $\vec{A}$. Все внешние силы системы вертикальны.

Пункт 1.

1. Момент наибольшего подъёма. Шайба поднимается, пока движется вверх относительно клина; в верхней точке её скорость *относительно клина* равна нулю. Значит, в этот момент шайба и клин движутся с одной горизонтальной скоростью V_1, а вертикальной скорости у шайбы нет (она вместе с клином едет горизонтально).

2. Закон сохранения горизонтальной проекции импульса системы «шайба + клин» от старта до верхней точки. В начале клин покоится, у шайбы $V_{0x} = V_0 \cos\alpha$:

$$mV_0 \cos\alpha = 2mV_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{V_0 \cos\alpha}{2}.$$

3. Закон сохранения механической энергии системы от старта до верхней точки. Работа сил $\vec{N}$ и $-\vec{N}$ в сумме равна нулю (поверхности гладкие, шайба не отрывается), пол работы не совершает:

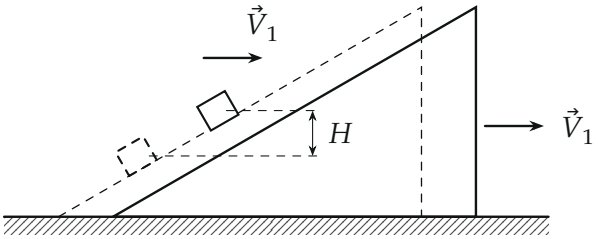
$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{2mV_1^2}{2} + mgH.$$

Подставим V_1:

$$H = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{V_1^2}{g} = \frac{V_0^2}{2g}\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2}\right),$$

$$H = \frac{4}{20}\left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{5}{16} \cdot \frac{V_0^2}{g} = 0{,}125 \text{ м}.$$

Часть начальной кинетической энергии осталась кинетической энергией движения системы как целого, поэтому H меньше, чем $\frac{V_0^2}{2g} = 0{,}2$ м на неподвижном клине.



Момент наибольшего подъёма: шайба покоится относительно клина, оба едут вправо со скоростью V_1. Штрихом — начальное положение. Шайба поднялась на H.

Пункт 2.

4. Почему относительная скорость при возвращении равна V_0. Сила $\vec{N}$ всё время перпендикулярна склону, а направление склона не меняется. Поэтому N постоянна, и ускорения шайбы и клина постоянны — значит, постоянно и ускорение шайбы относительно клина, $a_{\text{отн}}$, направленное вниз вдоль склона. Относительное движение — равнопеременное по прямой: шайба поднимается, останавливается и проходит тот же путь обратно за то же время, а в точке старта её относительная скорость равна V_0 по модулю и направлена вниз по склону. Её проекции: $-V_0\cos\alpha$ на x, $-V_0\sin\alpha$ на y. Клин по вертикали не движется, поэтому вертикальная скорость шайбы в системе земли

$$V_y = -V_0\sin\alpha,$$

а горизонтальная $V_x = V - V_0\cos\alpha$ (закон сложения скоростей).

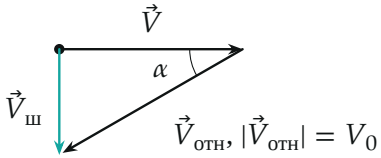
5. Закон сохранения горизонтальной проекции импульса от старта до возвращения.

$$mV_0\cos\alpha = mV_x + mV = m(2V - V_0\cos\alpha),$$

откуда

$$V = V_0\cos\alpha = \sqrt{3} \approx 1{,}7 \text{ м/с}.$$

Тогда $V_x = V - V_0\cos\alpha = 0$: шайба в этот момент движется строго вертикально вниз.



Сложение скоростей при возвращении (масштаб 1 см ≈ 0,7 м/с): скорость шайбы $\vec{V}_ш = \vec{V} + \vec{V}_{отн}$ направлена вертикально вниз и равна $V_0\sin\alpha = 1$ м/с.

6. Проверка законом сохранения энергии. Энергия в начале $\dfrac{mV_0^2}{2} = 2m$ (в Дж при m в кг); в конце шайба на исходной высоте:

$$\frac{m(V_0\sin\alpha)^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = \frac{m\cdot 1}{2} + \frac{m\cdot 3}{2} = 2m.$$

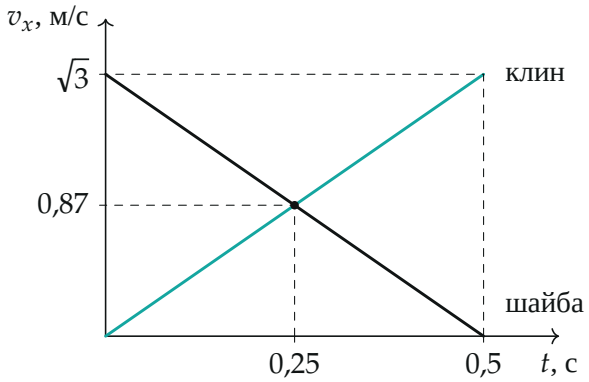
Сходится, так что $V_x = 0$ согласуется и с энергией (официальное решение получает $V_x = 0$ именно из системы двух законов сохранения).

Второй способ — через ускорения. Второй закон Ньютона для клина в проекции на x и для шайбы в проекции на нормаль к склону в системе клина (с силой инерции $-m\vec{A}$) дают

$$A = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46 \text{ м/с}^2, \qquad a_{отн} = \frac{2g\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Подъём длится $V_0/a_{отн} = 0{,}25$ с, путь по склону $V_0^2/(2a_{отн}) = 0{,}25$ м, высота $0{,}25\sin 30^\circ = 0{,}125$ м — как в пункте 1. Вверх и вниз — 0,5 с,

за это время клин разгоняется до $A \cdot 0{,}5 = 1{,}73$ м/с $= \sqrt{3}$ м/с — как в пункте 2.



Горизонтальные скорости клина и шайбы (масштаб 1 см = 0,5 м/с): линии пересекаются в момент наибольшего подъёма ($V_1 = 0{,}87$ м/с), к моменту возвращения шайба и клин «обменялись» горизонтальными скоростями.

Обратите внимание. Закон сохранения импульса здесь только для горизонтальной проекции: по вертикали пол действует на клин переменной силой $N_{\text{пол}}$, и вертикальный импульс системы меняется. И «скорость шайбы на высоте H равна нулю» — неверно: равна нулю только скорость относительно клина.

Проверка. Размерность: $\frac{V_0^2}{g}$ — метры. Предел: если бы клин был очень тяжёлым (масса $M \to \infty$), из закона сохранения импульса $V_1 \to 0$ и $H \to \frac{V_0^2}{2g} = 0{,}2$ м — подъём по неподвижной гладкой плоскости; лёгкий клин забирает часть энергии, поэтому у нас H меньше. Смысл: равные массы при «упругом» взаимодействии через склон обменялись горизонтальными скоростями — как шары при упругом лобовом ударе.

Ответ. 1) $H = \frac{V_0^2}{2g}\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2}\right) = 0{,}125$ м; 2) $V = V_0 \cos\alpha = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ м/с.