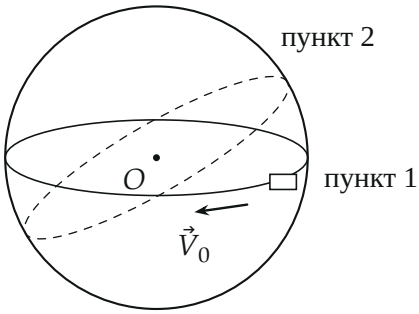
Модель автомобиля внутри проволочной сферы

Задача 3. [Физтех 2021/22, 10 класс, варианты 10-01–10-02, задача 3] По внутренней поверхности проволочной металлической сферы радиуса $R = 1{,}2$ м равномерно со скоростью $V_0 = 3{,}7$ м/с движется модель автомобиля. Движение происходит в горизонтальной плоскости большого круга. Масса модели $m = 0{,}4$ кг. Модель приводится в движение двигателем. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

1. С какой по величине силой P модель действует на сферу?
2. Рассмотрим модель автомобиля равномерно движущуюся по окружности в плоскости большого круга, составляющей с горизонтом угол $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Вычислите минимальную допустимую скорость V_{MIN} такого равномерного движения. Коэффициент трения скольжения шин по поверхности сферы $\mu = 0{,}9$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: сфера, горизонтальный большой круг (пункт 1) и большой круг под углом α к горизонту (пункт 2, штрих).

▲ **Решение. Что происходит.** Модель движется по окружности радиуса R с постоянной по модулю скоростью — значит, её ускорение центростремительное, V^2/R, к центру окружности. Большой круг проходит через центр сферы O, поэтому центр окружности — это O, и нормальная сила сферы $\vec{N}$ направлена как раз к центру. Это задача на второй закон Ньютона при движении по окружности с трением покоя: шины не проскальзывают, и сила трения — это трение покоя, которое может быть направлено в любую сторону по поверхности сферы, но не больше μN.

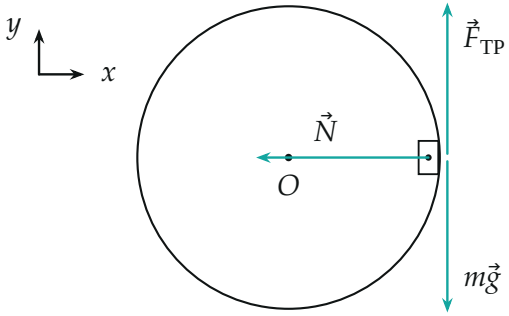
Обозначения. $\vec{N}$ — нормальная сила сферы, $\vec{F}_{\text{ТР}}$ — сила трения покоя, $a = \dfrac{V^2}{R}$ — центростремительное ускорение.

Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для модели. $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{ТР}}$. Окружность горизонтальна, модель на «экваторе» сферы: нормаль к сфере там горизонтальна, а касательная плоскость вертикальна. Проектируем на горизонталь к центру O (ось x) и на вертикаль (ось y): ускорение — к центру, вертикального нет; скорость постоянна, сопротивления нет, поэтому вдоль траектории трение не нужно:

$$x:\ N = \frac{mV_0^2}{R}, \qquad y:\ F_{\text{ТР}} - mg = 0 \ \Rightarrow\ F_{\text{ТР}} = mg.$$

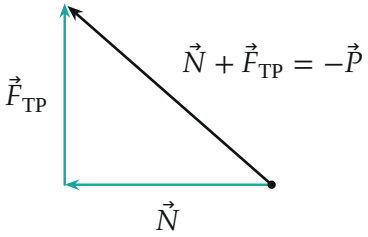
Числа: $N = 0{,}4 \cdot \dfrac{3{,}7^2}{1{,}2} \approx 4{,}56$ Н, $F_{\text{ТР}} = 4$ Н. Трение направлено вверх — оно и держит модель на вертикальной стенке.



Пункт 1, вертикальное сечение через центр (масштаб 1 см ≈ 2 Н): $\vec{N}$ горизонтальна и направлена к центру, $\vec{F}_{ТР}$ вверх по стенке уравновешивает $m\vec{g}$. Скорость модели перпендикулярна рисунку.

2. Сила давления на сферу. По третьему закону Ньютона модель действует на сферу силой $\vec{P} = -(\vec{N} + \vec{F}_{\text{ТР}})$ — это и давление на стенку, и сила трения шин о сферу. Составляющие взаимно перпендикулярны, поэтому по теореме Пифагора

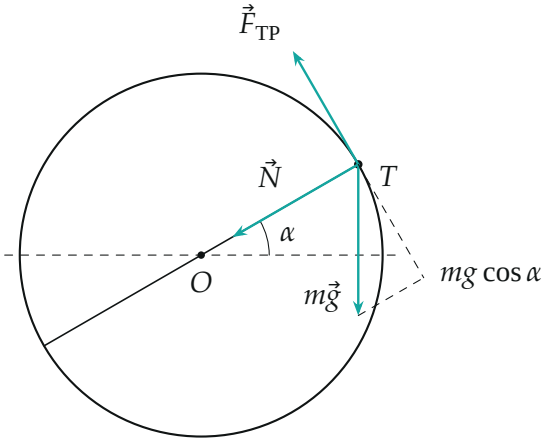
$$P = \sqrt{N^2 + F_{\text{ТР}}^2} = m\sqrt{\left(\frac{V_0^2}{R}\right)^2 + g^2} = 0{,}4\sqrt{11{,}41^2 + 10^2} \approx 6{,}1 \text{ Н}.$$



Сумма сил сферы на модель и сила $\vec{P}$ модели на сферу равны по модулю (1 см $\approx$ 2 Н).

Пункт 2.

3. Где модели труднее всего. Плоскость окружности наклонена к горизонту на α. Разложим $m\vec{g}$ на две части: перпендикулярную плоскости окружности, $mg\cos\alpha$, и лежащую в этой плоскости, $mg\sin\alpha$ (вдоль линии наибольшего наклона плоскости). Первую часть может погасить только трение: нормаль $\vec{N}$ лежит в плоскости окружности (направлена к O). Вторая часть в верхней точке окружности направлена к центру и помогает сфере «прижимать» модель меньше, а в нижней — от центра. Значит, хуже всего — в *верхней* точке: там нормальная сила, а с ней и предельное трение μN, наименьшие.



Пункт 2, сечение вертикальной плоскостью через линию наибольшего наклона плоскости окружности (масштаб 1 см = 2 Н, при $V = V_{MIN}$). Окружность

видна отрезком под углом α, T — её верхняя точка. $\vec{N}$ — к центру O вдоль плоскости окружности, $\vec{F}_{TP}$ — перпендикулярно ей, по касательной к сфере; штрихом — составляющая $m\vec{g}$ поперёк плоскости окружности, $mg\cos\alpha$; её гасит трение.

4. Второй закон Ньютона в верхней точке T. Скорость направлена перпендикулярно рисунку. Проекция на направление к центру (в плоскости окружности):

$$\frac{mV^2}{R} = N + mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mV^2}{R} - mg\sin\alpha.$$

Проекция на перпендикуляр к плоскости окружности: ускорения по нему нет, поэтому $F_{\text{ТР}} = mg\cos\alpha$. По касательной к траектории в точке T сила тяжести проекции не имеет, скорость постоянна.

5. Условие отсутствия проскальзывания. Трение покоя не больше предельного:

$$mg\cos\alpha \le \mu\Big(\frac{mV^2}{R} - mg\sin\alpha\Big) \quad \Rightarrow \quad V^2 \ge gR\Big(\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\mu}\Big).$$

Отсюда

$$V_{\text{MIN}} = \sqrt{gR\Big(\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\mu}\Big)} = \sqrt{12\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{1{,}8}\Big)} = \sqrt{6 + \frac{20}{\sqrt{3}}} \approx 4{,}2 \text{ м/с}.$$

При $V = V_{\text{MIN}}$: $N \approx 3{,}85$ Н, $F_{\text{ТР}} \approx 3{,}46$ Н, их отношение $0{,}9 = \mu$.

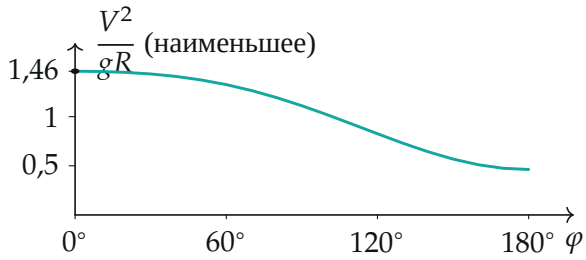
6. Проверка: в остальных точках окружности условие слабее. В точке, повёрнутой от верхней на угол φ по окружности, к центру направлена часть тяжести $mg\sin\alpha\cos\varphi$, а трению нужно погасить и $mg\cos\alpha$ (поперёк плоскости), и $mg\sin\alpha\sin\varphi$ (вдоль скорости — это «тянет» двигатель через шины). Условие

$$\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\varphi} \le \mu\Big(\frac{V^2}{gR} - \sin\alpha\cos\varphi\Big)$$

требует

$$\frac{V^2}{gR} \geq \sin\alpha\cos\varphi + \frac{1}{\mu}\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\varphi}.$$

Перебор на python по φ от 0 до 360°: максимум правой части 1,462 — при $\varphi = 0$, в верхней точке. Значит, найденная V_{MIN} годится для всей окружности (официальное решение этого не проверяет).



Наименьшее допустимое $V^2/(gR)$ в точке окружности, повёрнутой от верхней на угол φ (по точкам через 10°, дальше симметрично): самое жёсткое требование — в верхней точке.

Обратите внимание. В пункте 1 спрашивают полную силу действия модели на сферу: это не только давление N, но и трение шин, поэтому $P = \sqrt{N^2 + F_{\text{TP}}^2}$.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gR}$ — м/с. Предел $\alpha \to 0$ (горизонтальная окружность, как в пункте 1): $V_{\text{MIN}} = \sqrt{gR/\mu}$, то есть $\mu\frac{mV^2}{R} \geq mg$ — трение держит вес; при $V_0 = 3{,}7$ м/с: $\mu N = 4{,}1$ Н > 4 Н, модель из пункта 1 действительно не скользит. Смысл: чем быстрее модель, тем сильнее её прижимает сфера и тем больше доступное трение.

Ответ. 1) $P \approx 6{,}1$ Н; 2) $V_{\text{MIN}} = \sqrt{6 + 20/\sqrt{3}} \approx 4{,}2$ м/с.