Цикл с дугой окружности

Задача 4. [Физтех 2021/22, 10 класс, варианты 10-01–10-02, задача 4] Один моль одноатомного идеального газа участвует в цикле 1-2-3-1 (см. рис.), участок 1–2 — дуга окружности с центром в точке 3. Температура газа в состоянии 1 равна T_1.

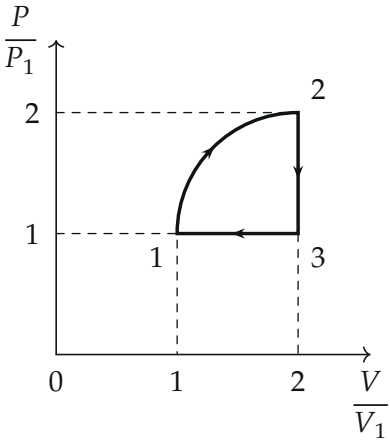


Рисунок условия.

1. Какое количество Q теплоты подведено к газу в процессе расширения?
2. Найдите работу A газа за цикл.
3. Найдите КПД η цикла.

Универсальная газовая постоянная R.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Цикл из трёх участков: расширение по дуге 1–2 (давление и объём растут), изохорное охлаждение 2–3 и изобарное сжатие 3–1. Работа газа — площадь под графиком в координатах P–V, работа за цикл — площадь самого цикла (четверть круга). Теплоту на каждом участке даёт первый закон термодинамики $Q = \Delta U + A$. Это задача на КПД цикла: $\eta = A/Q_{\text{подв}}$, и главное — верно найти *подведённую* теплоту.

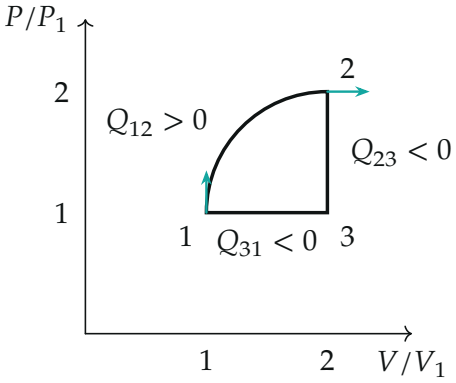
Обозначения. P_1, V_1 — давление и объём в состоянии 1, $P_1V_1 = RT_1$ (уравнение Менделеева — Клапейрона для одного моля). По рисунку:

состояние 1 — (V_1, P_1), 2 — $(2V_1, 2P_1)$, 3 — $(2V_1, P_1)$. Внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}PV$.

1. Где газ получает теплоту. Первый закон термодинамики для малого участка: $\delta Q = dU + P\,dV = \frac{3}{2}(P\,dV + V\,dP) + P\,dV = \frac{5}{2}P\,dV + \frac{3}{2}V\,dP$.

- 1–2: на дуге $dV \geq 0$ и $dP \geq 0$ на всём пути (дуга идёт от точки 1 вверх и вправо до точки 2), значит, $\delta Q > 0$ везде — газ только получает теплоту.
- 2–3: $dV = 0$, $dP < 0$ — $\delta Q < 0$, отдаёт.
- 3–1: $dP = 0$, $dV < 0$ — $\delta Q < 0$, отдаёт.

Теплота подводится только на участке 1–2, а это и есть процесс расширения.

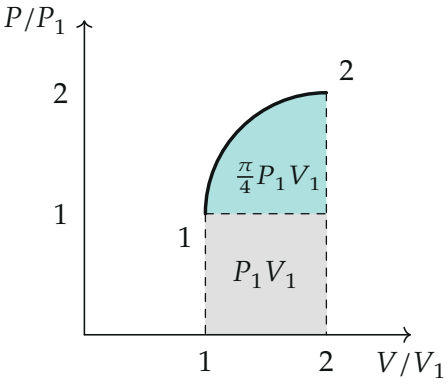


Знак теплоты на участках. Бирюзовые стрелки — касательные к дуге в её концах: в точке 1 дуга идёт вертикально вверх, в точке 2 — горизонтально вправо; между ними и P, и V растут.

Пункт 1.

2. Работа газа на участке 1–2. Работа — площадь под дугой 1–2 до оси V. Она складывается из прямоугольника под отрезком 1–3 (стороны V_1 и P_1) и четверти круга радиуса 1 в единицах V_1 и P_1:

$$A_{12} = P_1V_1 + \frac{\pi}{4}P_1V_1 = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)RT_1.$$



Работа газа на расширении 1–2: серый прямоугольник плюс бирюзовая четверть круга. Бирюзовая часть — это и работа за цикл.

3. Изменение внутренней энергии на 1–2. $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) = \frac{3}{2}(4-1)P_1V_1 = \frac{9}{2}RT_1$: температура выросла вчетверо, $T_2 = 4T_1$.

4. Первый закон термодинамики для участка 1–2.

$$Q = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{9}{2}RT_1 + \left(1+\frac{\pi}{4}\right)RT_1 = \left(\frac{11}{2}+\frac{\pi}{4}\right)RT_1 \approx 6{,}29\,RT_1.$$

Пункт 2.

5. Работа за цикл. Цикл обходится по часовой стрелке, поэтому работа газа положительна и равна площади цикла — четверти круга радиуса V_1 по оси объёма и P_1 по оси давления:

$$A = \frac{\pi}{4}P_1V_1 = \frac{\pi}{4}RT_1.$$

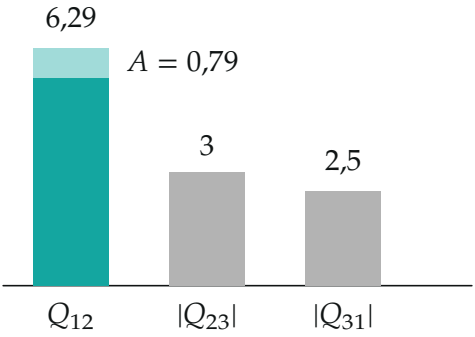
Проверка через участки: $A_{23} = 0$, $A_{31} = -P_1V_1$, $A = A_{12} + A_{31} = (1+\frac{\pi}{4})RT_1 - RT_1 = \frac{\pi}{4}RT_1$.

Пункт 3.

6. КПД. По определению КПД — отношение работы за цикл к подведённой теплоте:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{11}{2}+\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{22+\pi} \approx 0{,}125 = 12{,}5\,\%.$$

Второй способ — через отданную теплоту. $Q_{23} = \frac{3}{2}V_2(P_3 - P_2) = -3RT_1$, $Q_{31} = \frac{5}{2}P_1(V_1 - V_3) = -\frac{5}{2}RT_1$. Отдано $|Q_{\text{отд}}| = \frac{11}{2}RT_1$, и $A = Q - |Q_{\text{отд}}| = \frac{\pi}{4}RT_1$ — тот же результат.



Теплоты на участках в единицах RT_1 (высота — по вычисленным значениям). Светлая верхушка столбика Q_{12} — работа цикла $A = Q_{12} - |Q_{23}| - |Q_{31}| = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$.

Обратите внимание. В знаменатель КПД идёт только подведённая теплота Q_{12}, а не сумма теплот по модулю и не теплота за весь цикл (она равна A). На участке 1–2 теплота уходит не только в работу, но и на рост внутренней энергии, поэтому Q_{12} много больше площади под дугой.

Проверка. Размерность: RT_1 — Дж (для одного моля), η безразмерен. Оценка: максимальная и минимальная температуры цикла $4T_1$ и T_1, КПД Карно $1 - \frac{1}{4} = 75\,\%$, наш $12{,}5\,\%$ меньше — как и должно быть. Python: $\pi/(22 + \pi) = 0{,}1250$.

Ответ. 1) $Q = \left(\frac{11}{2} + \frac{\pi}{4}\right)RT_1 \approx 6{,}29\,RT_1$; 2) $A = \frac{\pi}{4}RT_1$; 3) $\eta = \frac{\pi}{22 + \pi} \approx 12{,}5\,\%$.