Сфера и заряженный стержень

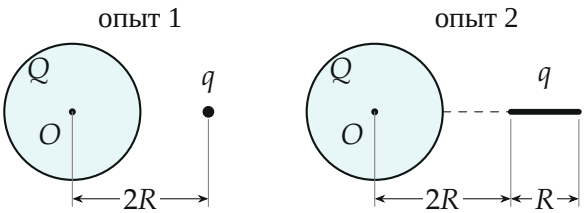
Задача 5. [Физтех 2021/22, 10 класс, варианты 10-01–10-02, задача 5] Заряд $Q > 0$ однородно распределен по сфере радиуса R. В первом опыте на расстоянии $2R$ от центра сферы помещают небольшой по размерам шарик с зарядом $q > 0$.

1. Найдите силу F_1, действующую на заряженный шарик.

Во втором опыте заряд q однородно распределяют по стержню длины R, стержень помещают на прямой, проходящей через центр заряженной сферы. Ближайшая к центру сферы точка стержня находится на расстоянии $2R$ от центра.

2. Найдите силу F_2, с которой заряд сферы действует на заряженный стержень.

Все силы, кроме кулоновских, считайте пренебрежимо малыми. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k. Явлениями поляризации пренебрегите.



Поясняющий рисунок: заряженная сфера и шарик (опыт 1), сфера и стержень на прямой через центр (опыт 2).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Сфера создаёт поле, и это поле действует на заряд q. Вне равномерно заряженной сферы поле такое же, как у точечного заряда Q в её центре (теорема Гаусса, сферическая симметрия). В первом опыте q — точечный, и сила — закон Кулона. Во втором опыте части стержня находятся на разных расстояниях и в разном поле, поэтому разбиваем стержень на малые кусочки и складываем силы: это задача на суммирование вкладов, сумма равна площади под графиком $E(x)$.

Обозначения. Ось x — от центра сферы O вдоль стержня. $E(x)$ — проекция напряжённости поля сферы на ось x, $\lambda = q/R$ — линейная плотность заряда стержня.

Пункт 1.

1. Поле сферы снаружи. Возьмём сферу радиуса $r > R$ с тем же центром. По теореме Гаусса поток поля через неё $E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi kQ$, поэтому

$$E(r) = \frac{kQ}{r^2} \quad (r > R),$$

поле направлено от центра (заряд положительный). Внутри сферы поля нет.

2. Сила на шарик. Шарик маленький, его можно считать точечным:

$$F_1 = qE(2R) = \frac{kQq}{(2R)^2} = \frac{kQq}{4R^2},$$

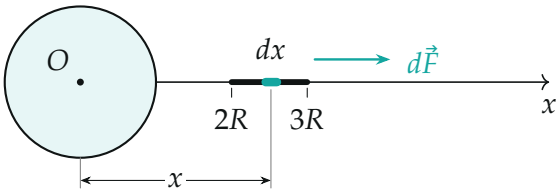
сила отталкивающая, направлена от центра сферы.

Пункт 2.

3. Сила на малый кусочек стержня. Выделим кусочек стержня длиной dx на расстоянии x от центра. Его заряд $dq = \lambda\, dx$, на длине dx поле почти не меняется, поэтому сила на кусочек

$$dF = E(x)\, dq = \frac{kQ\lambda}{x^2}\, dx.$$

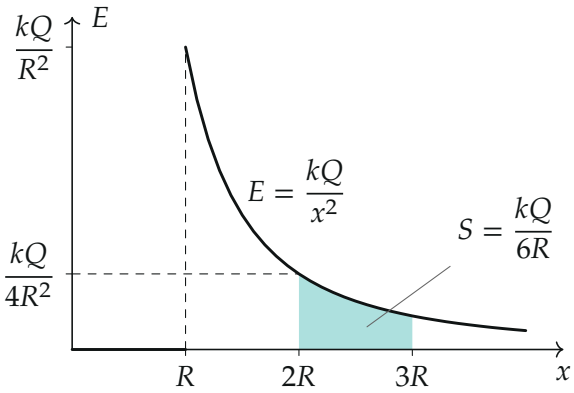
Все эти силы направлены вдоль стержня от центра, поэтому их модули просто складываются.



Стержень от $x = 2R$ до $x = 3R$ и его малый кусочек dx с зарядом $\lambda\, dx$ (бирюзовый); сила на него $dF = E(x)\lambda\, dx$ направлена от центра.

4. Сумма сил — площадь под графиком. Складываем по всему стержню от $x = 2R$ до $x = 3R$. Сумма $\sum E(x)\,dx$ — площадь под графиком $E(x)$ на этом отрезке, а по определению потенциала она равна разности потенциалов концов: $\sum E\,dx = \varphi(2R) - \varphi(3R)$, где снаружи сферы $\varphi(x) = \dfrac{kQ}{x}$. Поэтому

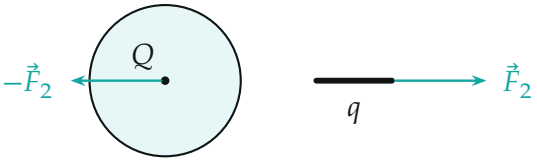
$$F_2 = \lambda(\varphi(2R) - \varphi(3R)) = \frac{q}{R}\Big(\frac{kQ}{2R} - \frac{kQ}{3R}\Big) = \frac{kQq}{6R^2}.$$



Поле сферы на оси (по точкам через $0{,}1R$): внутри нуль, снаружи kQ/x^2. Закрашенная площадь от $2R$ до $3R$ равна $\varphi(2R) - \varphi(3R) = kQ/(6R)$; сила на стержень — эта площадь, умноженная на λ.

5. Проверка вторым способом — третий закон Ньютона. Снаружи поле сферы совпадает с полем точечного заряда Q в центре, поэтому сфера действует на стержень так же, как точечный заряд Q в точке O. А сила точечного заряда Q на стержень по третьему закону Ньютона равна по модулю силе стержня на этот заряд, то есть $Q\,E_{\text{ст}}(O)$. Поле стержня в точке O: от кусочка dx на расстоянии x — $k\lambda\,dx/x^2$, сумма от $2R$ до $3R$ — та же площадь:

$$E_{\text{ст}}(O) = k\lambda\Big(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\Big) = \frac{kq}{6R^2}, \qquad F_2 = QE_{\text{ст}}(O) = \frac{kQq}{6R^2}.$$



Третий закон Ньютона: сфера отталкивает стержень силой $\vec{F}_2$, стержень отталкивает сферу силой $-\vec{F}_2$; вторую удобно считать как силу поля стержня на заряд Q в центре.

Обратите внимание. Стержень нельзя заменить точечным зарядом в его середине: получилось бы $\dfrac{kQq}{(2{,}5R)^2} = \dfrac{kQq}{6{,}25R^2}$ — меньше верного. Правильный ответ соответствует «среднему геометрическому» расстоянию $\sqrt{2R \cdot 3R} = \sqrt{6}R$: ближние части стержня в поле $1/x^2$ дают непропорционально большой вклад.

Проверка. Размерность: kQq/R^2 — сила. Предел: если стержень короткий, длины $\ell \ll R$, то $F = \frac{kQq}{\ell}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{2R+\ell}\right) \to \frac{kQq}{4R^2} = F_1$ — как для точечного заряда в опыте 1. Отношение $F_2/F_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$: стержень, вытянутый в слабое поле, отталкивается слабее. Численное суммирование на python (1000 кусочков) даёт $0{,}16667\,kQq/R^2$.

Ответ. 1) $F_1 = \dfrac{kQq}{4R^2}$; 2) $F_2 = \dfrac{kQq}{6R^2}$.