Бросок под углом, падение на крышу

Задача 1. [Физтех 2021/22, 10 класс, варианты 10-03–10-04, задача 1] Камень брошен с некоторой скоростью V_0 под углом $\alpha = 45°$ к горизонту (см. рис.). Максимальная высота полёта камня $H = 10$ м. В конце полёта камень падает на горизонтальную крышу, высота которой над точкой старта $h = 7$ м.

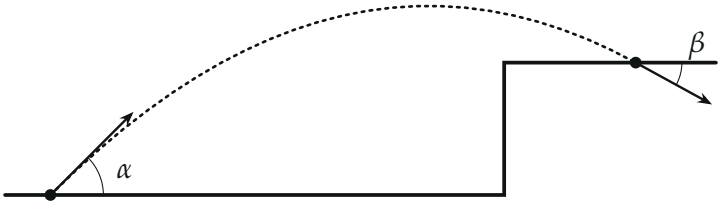
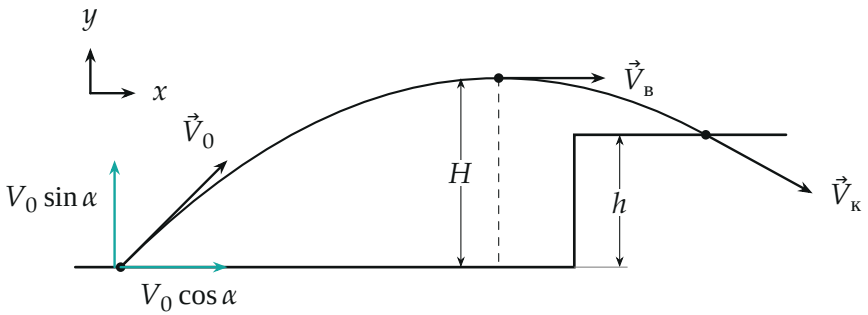


Рисунок условия (траектория построена по вычисленным точкам).

1. Найдите начальную скорость V_0 камня.
2. Найдите $\cos\beta$ (см. рис.), здесь β — угол, который вектор скорости образует с горизонтом в момент завершения полёта. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

▲ **Решение. Что происходит.** Камень летит только под действием силы тяжести, его ускорение $\vec{g}$ постоянно и направлено вниз. Поэтому движение раскладывается на два независимых: по горизонтали — равномерное (проекция скорости $V_0\cos\alpha$ не меняется), по вертикали — равнозамедленное, потом равноускоренное. Это задача на бросок под углом к горизонту: высоту подъёма даёт вертикальная проекция скорости, а направление скорости в конце — отношение проекций.

Обозначения. Ось x — горизонтально в сторону полёта, ось y — вертикально вверх, начало — в точке броска. V_x, V_y — проекции скорости, $V_к$ — модуль скорости в момент падения на крышу.



Траектория и скорости (масштаб: 1 см = 4 м по пути, 1 см = 10 м/с для скоростей). В верхней точке скорость горизонтальна, $V_в = V_0 \cos\alpha$; горизонтальная проекция одинакова во всех трёх точках.

Пункт 1.

1. Подъём до наивысшей точки. В наивысшей точке вертикальная проекция скорости равна нулю. Для вертикального равнозамедленного движения с ускорением $-g$ от броска до верхней точки:

$$0 - (V_0 \sin\alpha)^2 = -2gH \quad \Rightarrow \quad H = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g}.$$

2. Начальная скорость. При $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ получаем $H = \frac{V_0^2}{4g}$, откуда

$$V_0 = \sqrt{4gH} = \sqrt{4 \cdot 10 \cdot 10} = 20 \text{ м/с}.$$

Пункт 2.

3. Модуль скорости при падении на крышу. Закон сохранения механической энергии камня от броска до падения на крышу (работает только сила тяжести):

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_к^2}{2} + mgh,$$

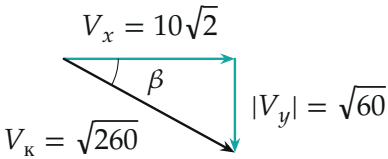
$$V_к = \sqrt{V_0^2 - 2gh} = \sqrt{400 - 140} = \sqrt{260} \approx 16{,}1 \text{ м/с}.$$

4. Угол с горизонтом. Горизонтальная проекция скорости за весь по-

лёт не меняется: $V_x = V_0 \cos\alpha = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$ м/с. Косинус угла скорости с горизонтом — отношение горизонтальной проекции к модулю:

$$\cos\beta = \frac{V_0\cos\alpha}{\sqrt{V_0^2 - 2gh}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{2gh}{V_0^2}}},$$

$$\cos\beta = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{140}{400}}} = \sqrt{\frac{10}{13}} \approx 0{,}88.$$

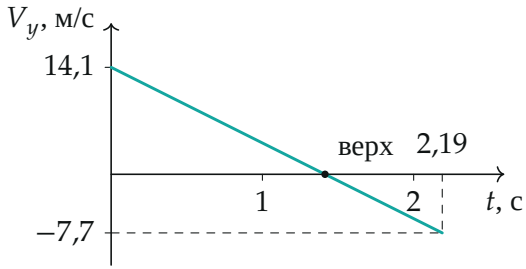


Треугольник скоростей в момент падения (м/с): $\cos\beta = V_x/V_к$.

Второй способ — через вертикальную проекцию. Вертикальное движение от броска до крыши: $V_y^2 - (V_0\sin\alpha)^2 = -2gh$, $V_y^2 = 200 - 140 = 60$, $V_y = -\sqrt{60}$ м/с (минус: камень уже падает — крыша достигнута на спуске, как на рисунке). Тогда $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{200}} = \sqrt{0{,}3}$ и

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}3}} = \sqrt{\frac{10}{13}}.$$

5. Где камень падает. Время полёта: $V_y = V_0\sin\alpha - gt$, $t = \dfrac{10\sqrt{2} + \sqrt{60}}{10} \approx 2{,}19$ с, дальность $x = V_x t \approx 31$ м; наивысшая точка — при $x = 20$ м. Уравнение траектории $y = x - \dfrac{x^2}{40}$ (в метрах) — по нему построены рисунки.



Вертикальная проекция скорости убывает линейно (масштаб 1 см = 10 м/с, 2 см = 1 с): ноль — в наивысшей точке, $-\sqrt{60} \approx -7{,}7$ м/с — в момент падения на крышу.

Обратите внимание. Скорость на высоте h по модулю одинакова и на подъёме, и на спуске, поэтому закон сохранения энергии сам по себе не говорит, на какой ветви камень встретил крышу. По условию это конец полёта (камень сверху падает на крышу), значит, вектор скорости направлен вниз под углом β — как на рисунке.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gH}$ — м/с; $\cos\beta$ безразмерен. Предел: при $h \to 0$ получаем $\cos\beta = \cos\alpha$ — падение на уровень старта под тем же углом; при $h \to H$ скорость становится горизонтальной, $\cos\beta \to \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = 1$. Наш $\beta \approx 28{,}7°$ между 0 и 45° — верно.

Ответ. 1) $V_0 = \sqrt{4gH} = 20$ м/с; 2) $\cos\beta = \sqrt{\dfrac{10}{13}} \approx 0{,}88$.