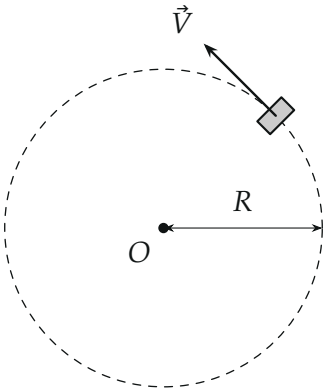
Автомобиль по окружности, горизонтальная и наклонная плоскости

Задача 2. [Физтех 2021/22, 10 класс, варианты 10-03–10-04, задача 2] Модель автомобиля равномерно движется по окружности радиуса $R = 1{,}2$ м, лежащей в горизонтальной плоскости. Модель приводится в движение двигателем. Коэффициент трения скольжения шин модели по поверхности $\mu = 0{,}8$, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

1. За какое минимальное время T автомобиль может проехать четверть окружности?

Модель помещают на наклонную поверхность, составляющую угол $\alpha = 30°$ с горизонтом.

2. Найдите максимальную скорость V_{MAX} равномерного движения модели по окружности радиуса $R = 1{,}2$ м на наклонной поверхности. Коэффициент трения скольжения шин модели по поверхности $\mu = 0{,}8$.



Поясняющий рисунок (вид сверху): модель едет по окружности радиуса R с постоянной по модулю скоростью.

▲ **Решение. Что происходит.** Модель едет по окружности равномерно, значит, её ускорение — центростремительное, $a = V^2/R$, к центру. В

плоскости дороги на модель действует только сила трения шин (её создаёт двигатель через колёса), а на наклонной дороге — ещё и составляющая силы тяжести вдоль склона. Сила трения не может превысить μN; это и ограничивает скорость. Главная идея второго пункта — на склоне нужная сила трения меняется по ходу окружности, и предел задаёт та точка, где её нужно больше всего. Задача на второй закон Ньютона для движения по окружности с предельной силой трения.

Обозначения. m — масса модели, $\vec{N}$ — сила нормальной реакции, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения шин о дорогу (сила покоя: шины не проскальзывают), $\vec{a}$ — ускорение.

Пункт 1.

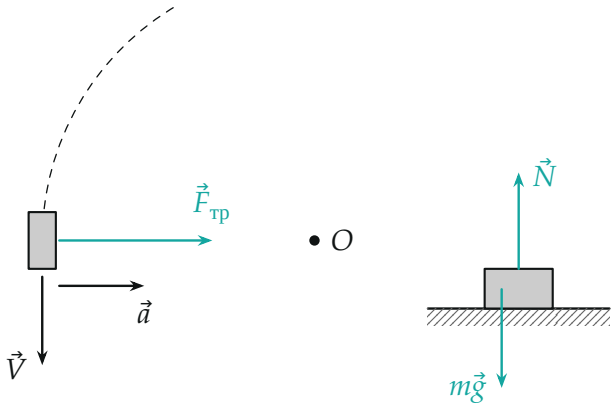
1. Второй закон Ньютона для модели в проекциях. $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$. Вертикаль: ускорения нет, $N = mg$. Касательная: скорость постоянна, сила тяги колёс уравновешивать нечего (сопротивления нет), касательная составляющая трения равна нулю. Радиус (к центру): $\dfrac{mV^2}{R} = F_{\text{тр}}$.

2. Предел силы трения. $F_{\text{тр}} \le \mu N = \mu mg$, поэтому

$$\frac{mV^2}{R} \le \mu mg \quad \Rightarrow \quad V \le \tilde{V}_{MAX} = \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0{,}8 \cdot 10 \cdot 1{,}2} \approx 3{,}10 \text{ м/с}.$$

3. Минимальное время. Четверть окружности — путь $\pi R/2$; быстрее всего — с наибольшей скоростью:

$$T = \frac{\pi R}{2\tilde{V}_{MAX}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{\mu g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1{,}2}{8}} \approx 0{,}61 \text{ с}.$$

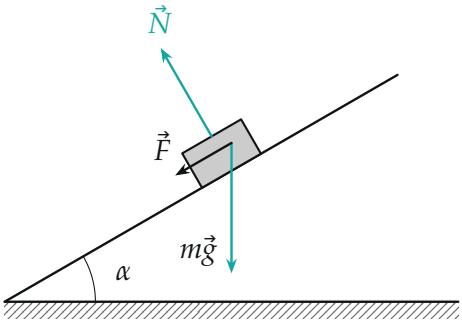


Пункт 1. Слева — вид сверху: к центру O модель тянет только сила трения $\vec{F}_{тр}$, она и сообщает ускорение $\vec{a}$. Справа — вид сбоку: $N = mg$.

Пункт 2.

4. Силы на склоне. Разложим силу тяжести: перпендикулярно склону $mg\cos\alpha$ (её уравновешивает N, поэтому $N = mg\cos\alpha$), вдоль склона вниз — $\vec{F}$, $F = mg\sin\alpha$. Окружность лежит в плоскости склона, поэтому всё движение — в этой плоскости, и в ней

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{тр} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{тр} = m\vec{a} - \vec{F}, \qquad F_{тр} \le \mu mg\cos\alpha.$$



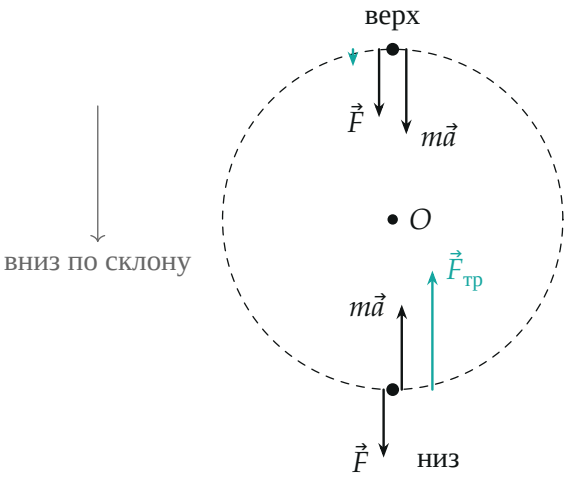
Вид сбоку на склон: $N = mg\cos\alpha$, а вдоль склона вниз действует составляющая силы тяжести $F = mg\sin\alpha$.

5. Где трения нужно больше всего. Вектор $m\vec{a}$ постоянен по модулю и всё время направлен к центру окружности, а $\vec{F}$ — всегда вниз по

склону. Модуль разности $|m\vec{a} - \vec{F}|$ наибольший, когда векторы $m\vec{a}$ и $\vec{F}$ противоположны, — в нижней точке окружности: там центр выше модели, $m\vec{a}$ направлено вверх по склону, $\vec{F}$ — вниз. Там

$$F_{\text{тр}} = \frac{mV^2}{R} + mg\sin\alpha.$$

В верхней точке, наоборот, $F_{\text{тр}} = \left|\frac{mV^2}{R} - mg\sin\alpha\right|$ — меньше.



Вид на плоскость склона. Внизу $m\vec{a}$ и $\vec{F}$ противоположны, и трение должно быть $ma + F$ — больше всего; вверху они сонаправлены, трения нужно $|ma - F|$ (при $V = V_{MAX}$ — короткая стрелка вниз).

6. Предельная скорость. Условие $F_{\text{тр}} \le \mu mg\cos\alpha$ в нижней точке:

$$\frac{mV^2}{R} + mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad V_{MAX} = \sqrt{gR(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

Числа: $\mu\cos\alpha - \sin\alpha = 0{,}8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = 0{,}193$,

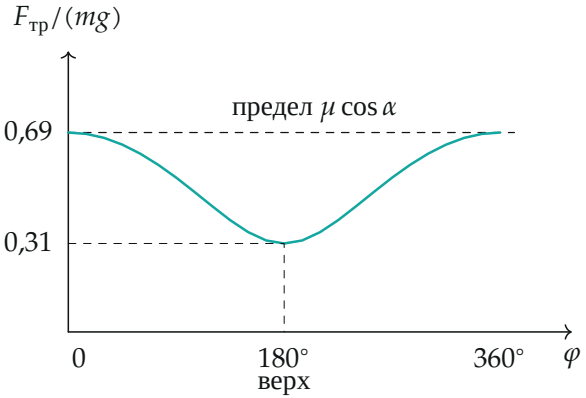
$$V_{MAX} = \sqrt{10\cdot 1{,}2\cdot 0{,}193} = \sqrt{\frac{6(4\sqrt{3}-5)}{5}} \approx 1{,}52 \text{ м/с}.$$

В остальных точках окружности трения нужно меньше, так что с этой скоростью модель проходит всю окружность.

7. Проверка вторым способом — нужная сила трения по всей окружности. Пусть φ — угол от нижней точки по ходу движения. Угол между $m\vec{a}$ и $-\vec{F}$ равен φ, и по теореме косинусов

$$\frac{F_{\text{тр}}}{mg} = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR}\right)^2 + \sin^2\alpha + 2\frac{V^2}{gR}\sin\alpha\cos\varphi}.$$

При $V = V_{MAX}$ ($V^2/gR = 0{,}193$) она равна $0{,}693 = \mu\cos\alpha$ внизу и $0{,}307$ вверху.



Нужная сила трения при $V = V_{MAX}$ по точкам формулы: она касается предела только в нижней точке ($\varphi = 0$ и $360°$).

Обратите внимание. Ошибка — считать опасной верхнюю точку или «среднюю» картину. На склоне трение и разгоняет по окружности, и держит модель от сползания; хуже всего внизу, где эти две задачи складываются.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gR}$ — м/с, $\sqrt{R/g}$ — с. Предел: при $\alpha = 0$ формула пункта 2 даёт $\sqrt{\mu gR}$ — скорость пункта 1. При $\operatorname{tg}\alpha = \mu$ получаем $V_{MAX} = 0$: модель еле держится на склоне неподвижно. Смысл: на склоне почти весь запас трения уходит на то, чтобы удержать модель от сползания, и для поворота остаётся немного — скорость падает вдвое.

Ответ. 1) $T = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{R}{\mu g}} \approx 0{,}61$ с; 2) $V_{MAX} = \sqrt{gR(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)} = \sqrt{\dfrac{6(4\sqrt{3}-5)}{5}} \approx 1{,}52$ м/с.