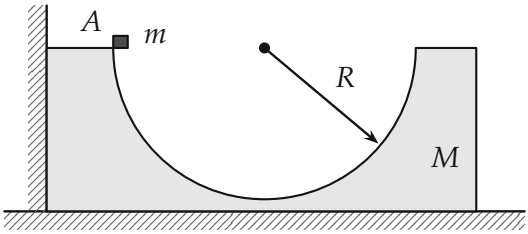
Шайба в полусфере на подвижном бруске у стенки

Задача 3. [Физтех 2021/22, 10 класс, варианты 10-03–10-04, задача 3] На гладкой горизонтальной поверхности вплотную к вертикальной стенке стоит брусок, в бруске сделано гладкое углубление в форме полусферы радиуса R (см. рис.). Из точки A с нулевой начальной скоростью скользит шайба массы m. Через некоторое время шайба достигает максимальной высоты $H = \dfrac{2R}{3}$, отсчитанной от нижней точки полусферы.



1. Найдите массу M бруска.
2. Найдите максимальную скорость V_{MAX} бруска при дальнейшем движении системы.
3. С какой по величине силой P брусок действует на горизонтальную поверхность в тот момент, когда его скорость V_{MAX}? Ускорение свободного падения g.

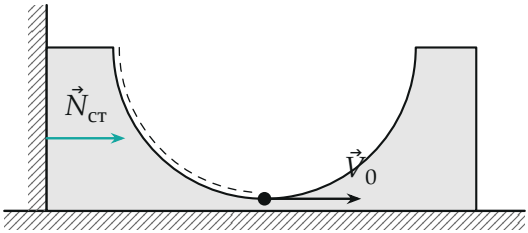
▲ **Решение.** **Что происходит.** Три этапа. Сначала шайба скользит по левой четверти полусферы и давит на брусок влево — брусок упирается в стенку и стоит; стенка внешняя сила, поэтому импульс системы не сохраняется, но энергия сохраняется (всё гладко). После нижней точки шайба давит на брусок вправо, брусок отходит от стенки, и дальше горизонтальных внешних сил нет: сохраняются горизонтальный импульс системы «шайба + брусок» и её механическая энергия. В высшей точке шайба и брусок движутся с одной скоростью. Задача на законы сохранения импульса и энергии и второй закон Ньютона в системе бруска.

Обозначения. Ось x — горизонтально вправо, ось y — вверх. V_0 — скорость шайбы в нижней точке на первом этапе, V_1 — общая скорость в момент наибольшего подъёма, V_x и V — проекции скоростей шайбы и бруска на ось x, когда шайба снова в нижней точке.

Пункт 1.

1. Закон сохранения механической энергии шайбы от A до нижней точки. Брусок неподвижен, его реакция перпендикулярна скорости шайбы и работы не совершает:

$$mgR = \frac{mV_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{2gR}.$$



Этап 1: шайба давит на брусок влево, стенка отвечает силой $\vec{N}_{ст}$, брусок стоит. В нижней точке скорость шайбы $V_0 = \sqrt{2gR}$.

2. Закон сохранения импульса системы в проекции на ось x от нижней точки до наибольшего подъёма. Внешние силы (тяжесть, опора) вертикальны, стенка уже не давит. В высшей точке шайба неподвижна относительно бруска (её скорость относительно бруска касательна к поверхности и обнуляется), поэтому у обоих скорость V_1:

$$mV_0 = (m+M)V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{m}{m+M}V_0.$$

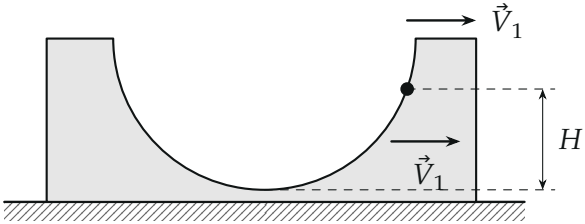
3. Закон сохранения механической энергии системы на том же отрезке.

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{(m+M)V_1^2}{2} + mgH.$$

Подставим V_1 и $V_0^2 = 2gR$:

$$mgH = \frac{mV_0^2}{2} \cdot \frac{M}{m+M} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{M}{m+M}R.$$

4. Масса бруска. По условию $\frac{H}{R} = \frac{M}{m+M} = \frac{2}{3}$, откуда $M = 2m$.



Этап 2: брусок отошёл от стенки. В момент наибольшего подъёма на высоту H шайба и брусок движутся с общей скоростью $\vec{V}_1$.

Пункт 2.

5. Когда скорость бруска наибольшая. Брусок разгоняет только горизонтальная составляющая силы давления шайбы. Пока шайба справа от нижней точки, она давит на брусок вправо и вниз, — брусок ускоряется. Поднявшись и вернувшись назад, шайба проходит нижнюю точку; после неё она давит на брусок влево — брусок тормозится. Значит, V_{MAX} — в момент, когда шайба снова в нижней точке.

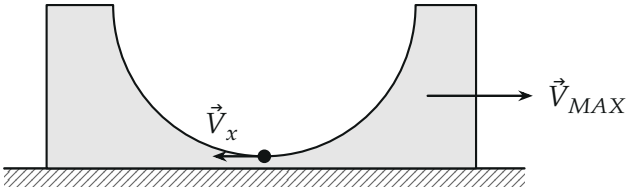
6. Законы сохранения импульса и энергии от первого прохождения нижней точки до второго. Высота шайбы в оба момента одна:

$$mV_0 = mV_x + MV, \qquad \frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_x^2}{2} + \frac{MV^2}{2}.$$

Это система «упругого удара»: перепишем как $m(V_0 - V_x) = MV$ и $m(V_0 - V_x)(V_0 + V_x) = MV^2$; деля, $V_0 + V_x = V$. Отсюда

$$V = V_{MAX} = \frac{2m}{m+M}V_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2gR}, \qquad V_x = \frac{m-M}{m+M}V_0 = -\frac{1}{3}V_0.$$

Знак минус: шайба в этот момент едет влево.



Этап 3: шайба снова в нижней точке, она едет влево со скоростью $V_0/3$, брусок — вправо с наибольшей скоростью $V_{MAX} = \frac{2}{3}V_0$ (длины стрелок в одном масштабе).

Пункт 3.

7. Система отсчёта бруска. В момент, когда шайба в нижней точке, сила её давления на брусок вертикальна, горизонтальных сил на брусок нет — его ускорение равно нулю. Поэтому в этот момент систему бруска можно считать инерциальной и писать в ней второй закон Ньютона. Относительно бруска шайба движется по окружности радиуса R со скоростью

$$U = |V_x - V| = \frac{1}{3}V_0 + \frac{2}{3}V_0 = V_0.$$

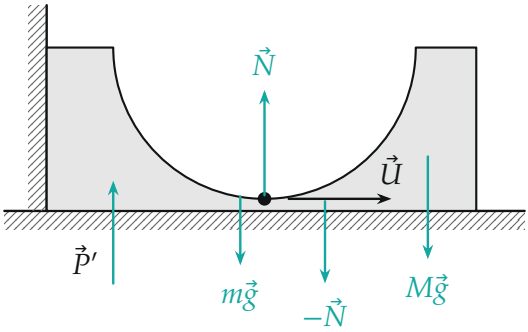
8. Второй закон Ньютона для шайбы в проекции на ось y (к центру полусферы).

$$m\frac{U^2}{R} = N - mg \quad \Rightarrow \quad N = m\Big(g + \frac{V_0^2}{R}\Big) = m(g + 2g) = 3mg.$$

9. Условие равновесия бруска по вертикали. На брусок действуют сила тяжести Mg, давление шайбы $N = 3mg$ вниз (третий закон Ньютона) и реакция пола P' вверх; ускорения по вертикали нет:

$$P' = Mg + N = 2mg + 3mg = 5mg.$$

По третьему закону Ньютона брусок давит на поверхность с силой $P = 5mg$.



Пункт 3, система бруска: шайба идёт по окружности со скоростью $U = V_0$, на неё действуют $m\vec{g}$ и $\vec{N}$. На брусок — $M\vec{g}$, давление шайбы $-\vec{N}$ и реакция пола $\vec{P}'$ (показана одной стрелкой).

Обратите внимание. В пункте 3 скорость шайбы относительно бруска — не V_x, а V_0: в центростремительное ускорение входит скорость *относительно* полусферы. А пока брусок у стенки, импульс системы не сохраняется — закон сохранения импульса можно писать только после нижней точки.

Проверка. Размерности: $\sqrt{gR}$ — скорость, mg — сила. Предел: $M \to \infty$ (брусок закреплён) — $H \to R$, шайба поднимается до края, $V_{MAX} \to 0$, $P \to Mg + 3mg$ — верно для неподвижной чаши. Энергия: $\frac{m}{2}\frac{V_0^2}{9} + \frac{2m}{2} \cdot \frac{4V_0^2}{9} = \frac{mV_0^2}{2}$ — сходится. Смысл: при возврате в нижнюю точку шайба и брусок обмениваются скоростями, как при упругом ударе тел масс m и $2m$.

Ответ. 1) $M = 2m$; 2) $V_{MAX} = \frac{2}{3}\sqrt{2gR}$; 3) $P = (M + 3m)g = 5mg$.