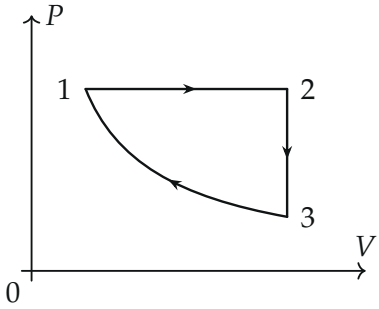
КПД цикла с изобарой, изохорой, адиабатой

Задача 4. [Физтех 2021/22, 10 класс, варианты 10-03–10-04, задача 4] С одноатомным идеальным газом проводят циклический процесс, состоящий из изобары $1 \to 2$, изохоры $2 \to 3$ и адиабаты $3 \to 1$ (см. рис.). В изобарическом процессе объём газа увеличивается в $n = 8$ раз.



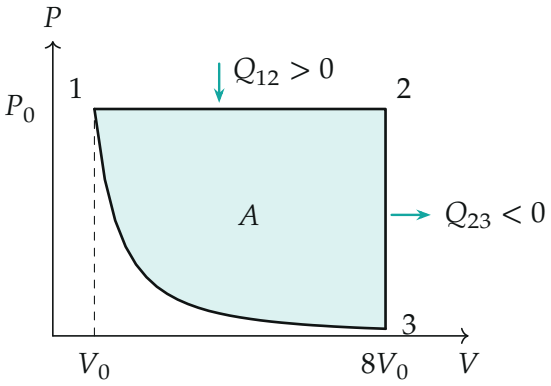
1. Найдите КПД такого цикла.

Указание: в адиабатическом процессе с одноатомным идеальным газом $PV^{5/3} = \text{const}$.

▲ **Решение. Что происходит.** За цикл газ возвращается в исходное состояние, его внутренняя энергия не меняется, и работа за цикл равна разности полученного и отданного тепла. КПД — работа, делённая на *полученное* тепло. Значит, нужно выяснить, на каких участках газ тепло получает, а на каких отдаёт, и посчитать эти теплоты первым началом термодинамики. Задача на первое начало для изопроцессов и КПД цикла.

Обозначения. Состояние 1: P_0, V_0; состояние 2: P_0, nV_0; состояние 3: P_3, nV_0. Q_{12} — тепло, полученное на изобаре, $|Q_{23}|$ — тепло, отданное на изохоре, A — работа газа за цикл. Внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}PV$ (в форме, удобной для расчёта по P и V: $\frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}PV$).

1. Где газ получает тепло. Изобара $1 \to 2$: объём растёт, PV растёт — газ нагревается и совершает работу, $Q_{12} > 0$. Изохора $2 \to 3$: работы нет, давление падает, температура падает — $Q_{23} < 0$, газ отдаёт тепло. Адиабата $3 \to 1$: теплообмена нет. Тепло получено только на $1 \to 2$.



Цикл в масштабе (адиабата по точкам $P = P_0(V_0/V)^{5/3}$): тепло входит на изобаре $1 \to 2$, выходит на изохоре $2 \to 3$; площадь внутри — работа A за цикл. Давление в точке 3 всего $P_0/32$.

2. Первое начало термодинамики для изобары $1 \to 2$. $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$, где $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}P_0(nV_0 - V_0)$ и $A_{12} = P_0(nV_0 - V_0)$:

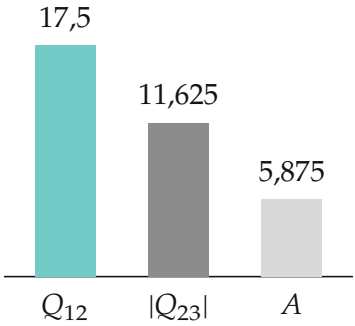
$$Q_{12} = \frac{5}{2}P_0V_0(n-1).$$

3. Давление в точке 3 — из уравнения адиабаты $3 \to 1$**.**

$$P_0V_0^{5/3} = P_3(nV_0)^{5/3} \quad \Rightarrow \quad P_3 = \frac{P_0}{n^{5/3}}.$$

4. Первое начало для изохоры $2 \to 3$. Работы нет, $Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{3}{2}nV_0(P_3 - P_0)$; отданное тепло

$$|Q_{23}| = \frac{3}{2}P_0nV_0\Big(1 - \frac{1}{n^{5/3}}\Big) = \frac{3}{2}P_0V_0\Big(n - \frac{1}{n^{2/3}}\Big).$$



Теплоты и работа при $n = 8$ в единицах P_0V_0: $A = Q_{12} - |Q_{23}| = 17{,}5 - 11{,}625 = 5{,}875$.

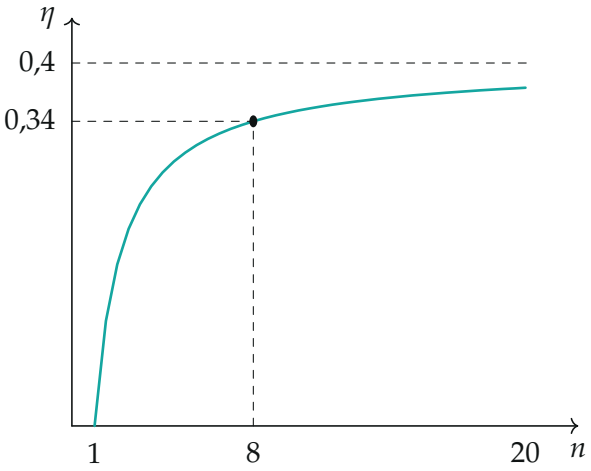
5. КПД. Работа за цикл $A = Q_{12} - |Q_{23}|$ (внутренняя энергия за цикл не изменилась), поэтому

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{n - n^{-2/3}}{n - 1}.$$

При $n = 8$: $n^{-2/3} = \frac{1}{4}$,

$$\eta = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{8 - \frac{1}{4}}{7} = 1 - \frac{93}{140} = \frac{47}{140} \approx 0{,}34.$$

6. Проверка вторым способом — работа как площадь. Работа на изобаре $P_0V_0(n - 1) = 7P_0V_0$; на адиабате $3 \to 1$ работа газа равна минус приросту внутренней энергии: $A_{31} = -\frac{3}{2}(P_0V_0 - P_3nV_0) = -\frac{3}{2}P_0V_0(1 - \frac{1}{4}) = -1{,}125P_0V_0$. Итого $A = 5{,}875P_0V_0$ и $\eta = 5{,}875/17{,}5 = 0{,}3357$ — совпало.



КПД цикла в зависимости от n по точкам формулы: при $n = 8$ он 0,34, при больших n стремится к $1 - \frac{3}{5} = 0{,}4$.

Обратите внимание. КПД — это работа, делённая на *полученное* тепло Q_{12}, а не на сумму модулей всех теплот: отданное на изохоре тепло в знаменатель не входит.

Проверка. Размерность: η безразмерен, $0 < \eta < 1$. Пределы: $n \to 1$ — цикл стягивается в точку, $\eta \to 0$; $n \to \infty$ — $\eta \to 1 - \frac{3}{5} = 0{,}4$, отношение C_V/C_P. Смысл: газ получает тепло при постоянном давлении, а отдаёт при постоянном объёме; почти две трети полученного уходит обратно, на работу остаётся треть.

Ответ. 1) $\eta = 1 - \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{n - n^{-2/3}}{n - 1} = \dfrac{47}{140} \approx 0{,}34.$