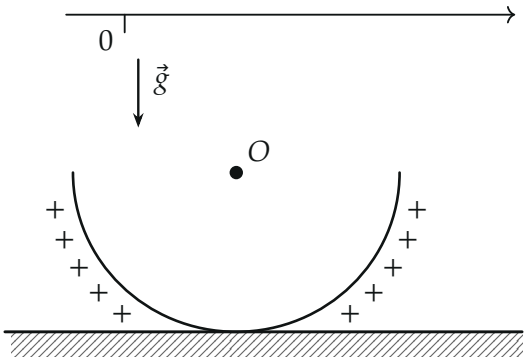
Заряженная полусфера и точечный заряд в центре

Задача 5. [Физтех 2021/22, 10 класс, варианты 10-03–10-04, задача 5] На горизонтальной поверхности лежит однородная полусфера (см. рис.) массы m. Точка O находится на расстоянии R от всех точек полусферы. По поверхности полусферы однородно с поверхностной плотностью σ распределён положительный заряд. В точку O переносят точечный заряд $Q > 0$.



1. Найдите работу A внешней силы при переносе заряда Q из бесконечности в точку O. Электрическая постоянная ε_0.
2. С какой по величине силой P полусфера действует на горизонтальную поверхность после переноса заряда Q из бесконечности в точку O? Ускорение свободного падения g.

Явлениями поляризации пренебрегите.

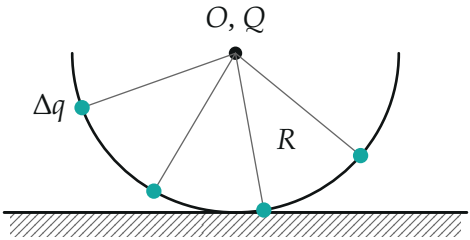
▲ **Решение. Что происходит.** Заряд полусферы неподвижен, поле в точке O складывается из полей малых кусочков (принцип суперпозиции). Главная идея — все кусочки находятся на одном расстоянии R от точки O. Поэтому потенциал в O находится сразу по полному заряду, без интегрирования, а для силы удобно заметить, что вертикальная составляющая силы от каждого кусочка пропорциональна площади его проекции на горизонтальную плоскость. Перенос заряда медленный, работа внешней силы идёт на энергию взаимодействия. Задача на потенциал и силу от распределённого заряда и симметрию.

Обозначения. $q_{\text{п}} = \sigma \cdot 2\pi R^2$ — полный заряд полусферы ($2\pi R^2$ — площадь полусферы), φ — потенциал поля полусферы в точке O (на бесконечности $\varphi = 0$), ΔS — площадь малого кусочка полусферы, θ — угол между радиусом к кусочку и вертикалью. Ось y — вертикально вверх.

Пункт 1.

1. Потенциал в точке O по принципу суперпозиции. Кусочек с зарядом $\Delta q = \sigma \Delta S$ создаёт в O потенциал $\dfrac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 R}$; расстояние R у всех кусочков одно, поэтому

$$\varphi = \sum \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q_{\text{п}}}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma \cdot 2\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}.$$



Каждый кусочек Δq полусферы находится на расстоянии R от точки O: потенциал в O определяется только полным зарядом.

2. Работа внешней силы. Заряд Q переносят медленно (без кинетической энергии), поэтому работа внешней силы равна приросту энергии заряда в поле полусферы:

$$A = Q(\varphi - 0) = \frac{Q\sigma R}{2\varepsilon_0}.$$

Пункт 2.

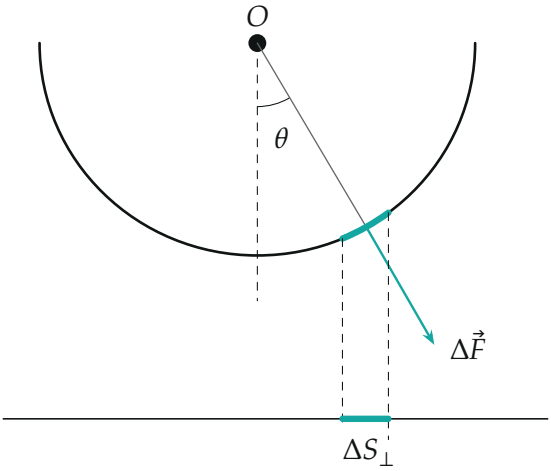
3. Сила от заряда Q на кусочек ΔS (закон Кулона). Заряды одного знака отталкиваются, сила направлена по радиусу от O, то есть наружу и вниз:

$$\Delta F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q\sigma\Delta S}{R^2}.$$

4. Проекции на горизонталь и вертикаль. Горизонтальные проекции сил от кусочков, симметричных относительно вертикальной оси, взаимно уничтожаются (полусфера осесимметрична). Вертикальная проекция — вниз:

$$\Delta F_y = -\Delta F \cos\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q\sigma\,\Delta S \cos\theta}{R^2}.$$

Произведение $\Delta S \cos\theta = \Delta S_\perp$ — площадь проекции кусочка на горизонтальную плоскость: площадка наклонена к горизонту на тот же угол θ, что и радиус к вертикали.



Кусочек ΔS (бирюзовая дуга) отталкивается от Q по радиусу. Вертикальная проекция силы, $\Delta F \cos\theta$, пропорциональна $\Delta S \cos\theta = \Delta S_\perp$ — проекции кусочка на горизонтальную плоскость.

5. Суммирование по всей полусфере. Проекции всех кусочков на горизонтальную плоскость без наложений покрывают круг радиуса R — основание полусферы: $\sum \Delta S_\perp = \pi R^2$. Поэтому

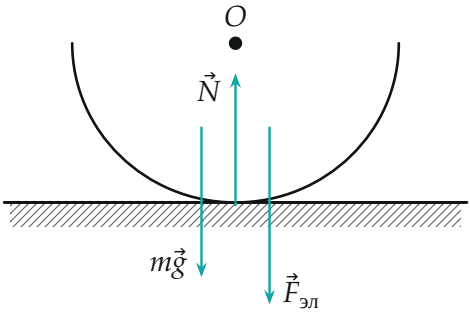
$$F_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q\sigma}{R^2} \sum \Delta S_\perp = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q\sigma}{R^2} \cdot \pi R^2 = -\frac{Q\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Знак минус — сила от заряда Q прижимает полусферу вниз.

6. Условие равновесия полусферы в проекции на ось y. На неё действуют сила тяжести mg вниз, электрическая сила $\frac{Q\sigma}{4\varepsilon_0}$ вниз и сила реакции поверхности N вверх:

$$N - mg - \frac{Q\sigma}{4\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg + \frac{Q\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

По третьему закону Ньютона полусфера давит на поверхность с силой $P = N = mg + \frac{Q\sigma}{4\varepsilon_0}$.



Силы на полусферу: тяжесть $m\vec{g}$, электрическая сила $\vec{F}_{эл}$, $F_{эл} = \frac{Q\sigma}{4\varepsilon_0}$, обе вниз, и реакция поверхности $\vec{N}$ вверх.

Обратите внимание. В пункте 1 нельзя «посчитать поле и умножить на путь»: потенциал — скаляр, и для него достаточно, что расстояние у всех кусочков одно. В пункте 2 поле в O не сводится к полному заряду: вклады разных кусочков направлены по-разному, поэтому складываем проекции.

Проверка. Размерности: $\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$ — В, $\frac{Q\sigma R}{\varepsilon_0}$ — Дж, $\frac{Q\sigma}{\varepsilon_0}$ — Кл·(В/м) = Н. Второй способ для силы: для целой сферы с зарядом в центре силы уравновешены; верхняя полусфера тянулась бы вверх с той же силой $\frac{Q\sigma}{4\varepsilon_0}$, и через проекции оба ответа одинаковы — симметрия сходится. Смысл: давление поля заряда Q на полусферу эквивалентно равномерному давлению $\frac{Q\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ на её основание πR^2.

Ответ. 1) $A = \frac{Q\sigma R}{2\varepsilon_0}$; 2) $P = mg + \frac{Q\sigma}{4\varepsilon_0}$.