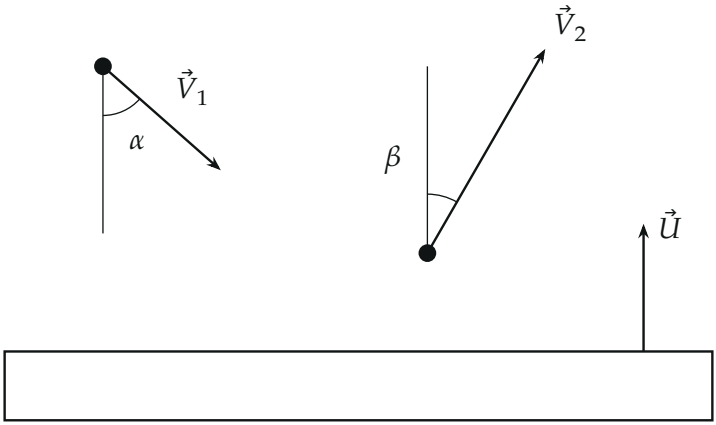
Неупругий удар шарика о движущуюся плиту

Задача 1. [Физтех 2021/22, 11 класс, задача 1] Массивная плита движется с постоянной скоростью U вертикально вверх. К плите подлетает шарик, имеющий перед ударом скорость $V_1 = 8$ м/с, направленную под углом α к вертикали ($\sin\alpha = \frac{3}{4}$) (см. рис.). После неупругого удара о гладкую горизонтальную поверхность плиты шарик отскакивает со скоростью V_2, составляющей угол β с вертикалью ($\sin\beta = \frac{1}{2}$).



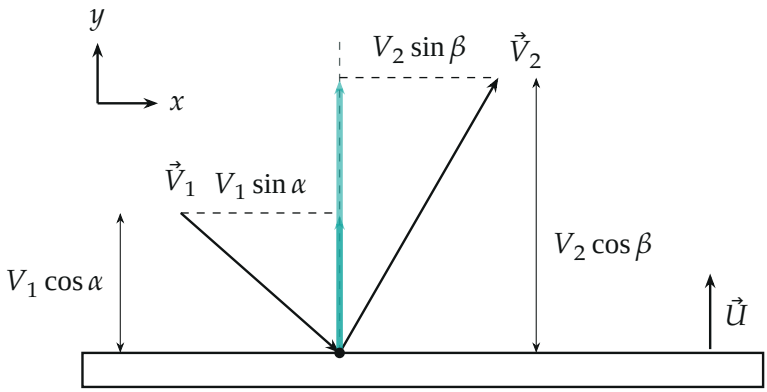
1. Найти скорость V_2.
2. Найти возможные значения скорости плиты U при таком неупругом ударе.

Действие силы тяжести за малое время удара не учитывать. Ответы допустимы через радикалы из целых чисел.

▲ **Решение. Что происходит.** Шарик ударяется о гладкую горизонтальную поверхность, поэтому сила удара $\vec{N}$ направлена строго вертикально, и горизонтальная составляющая скорости шарика не меняется. Это сразу даёт V_2. Вертикальная составляющая меняется, и здесь важна скорость плиты. Плита массивная, её скорость U при ударе остаётся прежней, поэтому удобно перейти в систему отсчёта плиты: она движется

равномерно, значит, инерциальна, а в ней плита неподвижна. Там действует правило неупругого удара о неподвижную стенку: шарик не может отлететь быстрее, чем подлетел. Это правило и ограничит U.

Обозначения. Ось x — горизонтально вправо, ось y — вертикально вверх; скорости без штрихов даны в системе отсчёта, связанной с землёй. Из условия $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Проекции скорости шарика: до удара $V_{1x} = V_1\sin\alpha$, $V_{1y} = -V_1\cos\alpha$; после удара $V_{2x} = V_2\sin\beta$, $V_{2y} = V_2\cos\beta$.



Скорости шарика до и после удара: горизонтальные проекции равны, вертикальные — нет (бирюзовые отрезки — вертикальные проекции, масштаб 1 м/с = 0,35 см).

Пункт 1.

1. Закон сохранения горизонтальной составляющей импульса шарика. Плита гладкая, поэтому сила трения отсутствует, а сила удара $\vec{N}$ вертикальна; силу тяжести за малое время удара не учитываем. Значит, на шарик по горизонтали сила не действует, и его горизонтальный импульс до и после удара одинаков: $mV_{1x} = mV_{2x}$, то есть

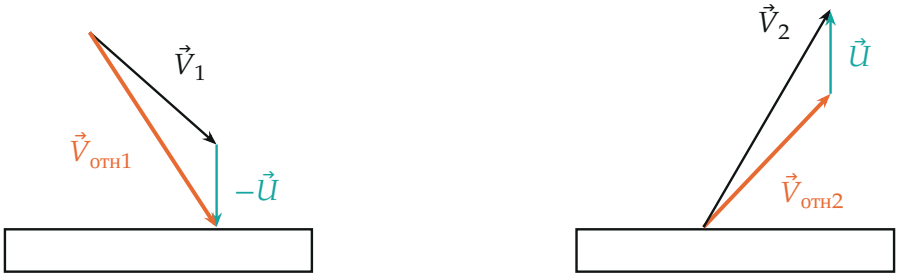
$$V_1\sin\alpha = V_2\sin\beta \quad\Rightarrow\quad V_2 = V_1\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 8\cdot\frac{3/4}{1/2} = 12\ \text{м/с}.$$

Обратите внимание: после неупругого удара скорость шарика в земной системе возросла ($12 > 8$). Противоречия нет: плита едет вверх и со-

вершает над шариком работу, а «неупругий» значит лишь, что энергия теряется в системе плиты.

Пункт 2.

2. Переход в систему отсчёта плиты. Вычтем из вертикальных скоростей шарика вертикальную скорость плиты U. Горизонтальные проекции не изменятся (плита по горизонтали стоит). В этой системе вертикальная проекция скорости шарика до удара $u_1 = -V_1\cos\alpha - U$ (шарик движется вниз, плита ему навстречу, поэтому скорости складываются), после удара $u_2 = V_2\cos\beta - U$. Обозначим модули $w_0 = |u_1| = V_1\cos\alpha + U$ (скорость сближения) и $w = u_2 = V_2\cos\beta - U$ (скорость удаления).



до удара

после удара

Скорости в системе отсчёта плиты (пример при $U = 4$ м/с). Относительная скорость до удара $\vec{V}_{отн1} = \vec{V}_1 - \vec{U}$, после удара $\vec{V}_{отн2} = \vec{V}_2 - \vec{U}$.

3. Условия, которым подчиняется неупругий удар. Запишем их для системы плиты, где плита неподвижна и её энергия не меняется (она массивная).

а) Шарик после удара должен уйти от плиты, а не въехать в неё: $w \geq 0$.

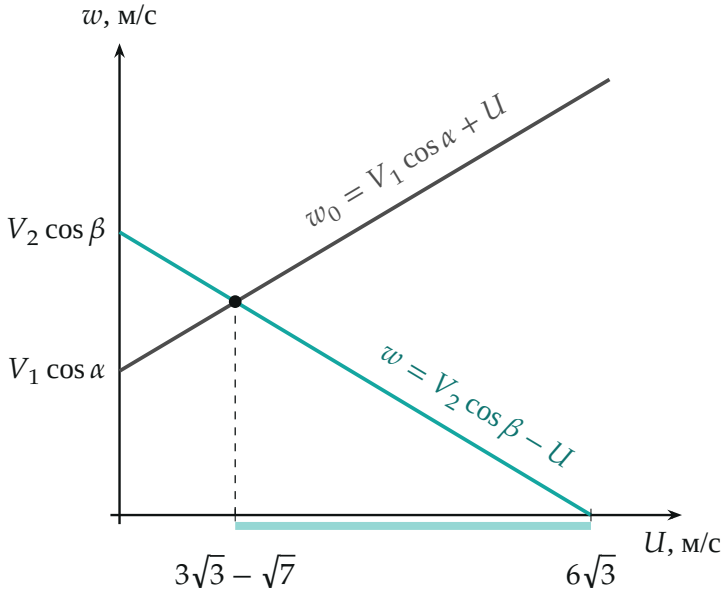
б) Кинетическая энергия шарика в этой системе не может возрасти. Горизонтальные скорости до и после равны ($V_1\sin\alpha = V_2\sin\beta$), поэтому из $\frac{m}{2}(V_{1x}^2 + u_2^2) \leq \frac{m}{2}(V_{1x}^2 + u_1^2)$ следует $|u_2| \leq |u_1|$, то есть $w \leq w_0$. Равенство — упругий удар, строгое неравенство — потеря энергии (коэффициент восстановления w/w_0 лежит в пределах от 0 до 1).

Итак,

$$0 \leq V_2\cos\beta - U \leq V_1\cos\alpha + U.$$

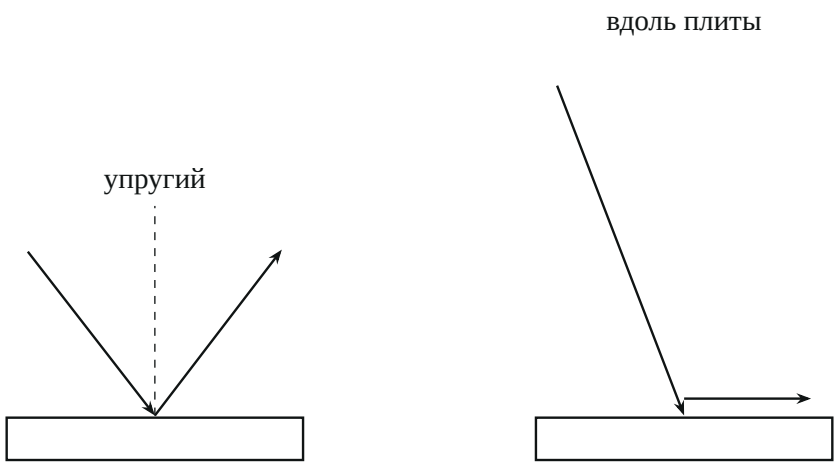
4. Решение неравенств. Подставим $V_2 \cos\beta = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ и $V_1 \cos\alpha = 8 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = 2\sqrt{7}$. Левое неравенство даёт $U \le 6\sqrt{3}$. Правое: $6\sqrt{3} - U \le 2\sqrt{7} + U$, откуда $2U \ge 6\sqrt{3} - 2\sqrt{7}$:

$$\boxed{3\sqrt{3} - \sqrt{7}\ \text{м/с} \le U \le 6\sqrt{3}\ \text{м/с}} \qquad (\approx 2{,}55\ \text{м/с} \le U \le 10{,}39\ \text{м/с}).$$



Допустимы те U, при которых скорость удаления w (бирюзовая прямая) неотрицательна и не больше скорости сближения w_0 (серая прямая): бирюзовый участок на оси U.

5. Что происходит на границах. При $U = 3\sqrt{3} - \sqrt{7}$ прямые пересекаются: $w = w_0 \approx 7{,}84$ м/с, удар упругий (в системе плиты шарик отражается по закону «угол падения равен углу отражения»). При $U = 6\sqrt{3}$ скорость удаления $w = 0$: после удара шарик по вертикали едет вместе с плитой, то есть скользит вдоль её поверхности. Между границами удар теряет часть энергии.



Относительные скорости шарика на границах интервала (в системе плиты). Справа вектор после удара чуть приподнят над поверхностью для читаемости.

Проверка. Размерность: везде скорости, м/с. Проверим границы подстановкой: при $U = 3\sqrt{3} - \sqrt{7}$ получаем $w = 6\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{7} = 3\sqrt{3} + \sqrt{7}$ и $w_0 = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{3} - \sqrt{7} = 3\sqrt{3} + \sqrt{7}$, они равны, как и должно быть при упругом ударе. Значение внутри интервала, $U = 6$ м/с: $w = 4{,}39$, $w_0 = 11{,}29$, коэффициент $w/w_0 \approx 0{,}39$ лежит между 0 и 1. Значение вне интервала, $U = 2$ м/с: $w = 8{,}39 > w_0 = 7{,}29$, энергия шарика в системе плиты выросла бы, такой удар невозможен. Смысл: чем быстрее плита, тем меньше шарик «чувствует» её как препятствие и тем ближе удар к касательному; слишком медленная плита потребовала бы от шарика отскочить быстрее, чем он подлетел.

Ответ. 1) $V_2 = 12$ м/с; 2) $(3\sqrt{3} - \sqrt{7})$ м/с $\le U \le 6\sqrt{3}$ м/с, то есть примерно от 2,55 до 10,39 м/с.