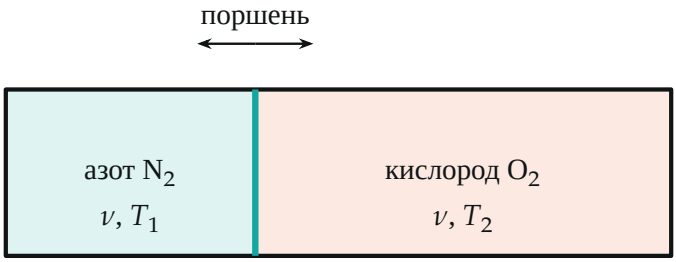
Газы по обе стороны теплопроводящего поршня

Задача 2. [Физтех 2021/22, 11 класс, задача 2] Цилиндрический теплоизолированный горизонтально расположенный сосуд разделён на два отсека теплопроводящим поршнем, который может перемещаться горизонтально без трения. В первом отсеке находится азот, во втором — кислород, каждый газ в количестве $\nu = \frac{3}{7}$ моль. Начальная температура азота $T_1 = 300$ К, а кислорода $T_2 = 500$ К. Температуры газов начинают медленно выравниваться, а поршень начинает медленно двигаться. Газы считать идеальными с молярной теплоёмкостью при постоянном объёме $C_V = \frac{5}{2}R$. $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

1. Найдите отношение начальных объёмов азота и кислорода.
2. Найдите установившуюся температуру в сосуде.
3. Какое количество теплоты передал кислород азоту?



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): сосуд теплоизолирован, поршень проводит тепло и двигается без трения.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на теплообмен двух газов через подвижную перегородку: тепло переходит от более горячего кислорода к азоту, а поршень при этом медленно сдвигается. Поршень без трения и движется медленно, поэтому давления с двух сторон в каждый момент одинаковы. Ключевые законы — уравнение Клапейрона — Менделеева для каждого газа и сохранение энергии для всего сосуда: он теплоизолирован, и внутренняя энергия двух газов вместе не меняется (работу, которую один газ совершает над поршнем, получает другой газ).

Обозначения. P — давление в сосуде (общее для обоих газов), V_1 и V_2 — объёмы азота и кислорода, T_1 и T_2 — их температуры (в начале $T_{10} = 300$ К, $T_{20} = 500$ К, в конце оба газа имеют температуру T). Индекс 0 у объёмов — начальные значения.

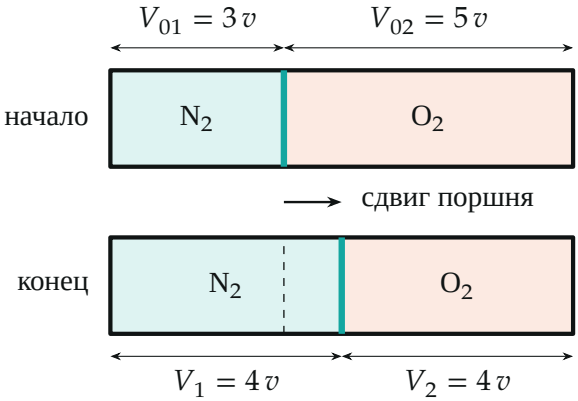
Пункт 1.

1. Начальные объёмы. Давления слева и справа от поршня равны (поршень без трения и в равновесии), обозначим P_0. Уравнение Клапейрона — Менделеева для каждого газа в начальный момент:

$$P_0 V_{01} = \nu R T_{10}, \qquad P_0 V_{02} = \nu R T_{20}.$$

Разделим уравнения друг на друга: число молей и давление сократятся (именно поэтому нужны одинаковые ν и равные давления):

$$\frac{V_{01}}{V_{02}} = \frac{T_{10}}{T_{20}} = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}.$$



Объём, приходящийся на одну «долю», обозначен v: сначала объёмы относятся как 3 : 5, в конце — как 4 : 4; поршень сдвинулся в сторону азота.

Пункт 2.

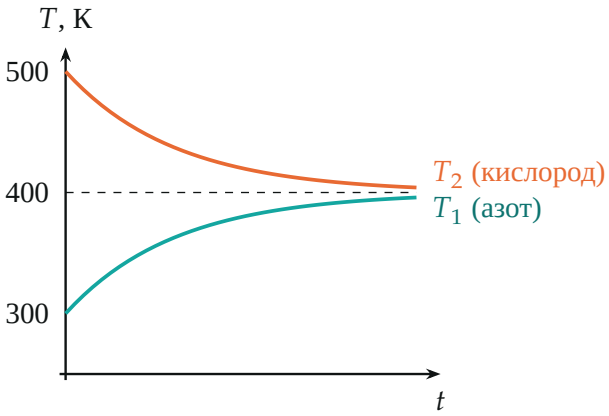
2. Закон сохранения энергии для системы из двух газов. Сосуд теплоизолирован, внешние тела над газами работы не совершают (стенки неподвижны), поэтому полная внутренняя энергия газов не изменяется:

работа A, совершаемая азотом над поршнем, равна работе, совершаемой поршнем над кислородом, и в сумме энергия не меняется. Внутренняя энергия идеального газа $U = \nu C_V T$:

$$\nu C_V T_{10} + \nu C_V T_{20} = \nu C_V T + \nu C_V T \;\Rightarrow\; T = \frac{T_{10} + T_{20}}{2} = 400\ \text{К}.$$

Теплоёмкости и числа молей одинаковы, поэтому они сократились: температура равна среднему арифметическому.

Обратите внимание: это ответ именно потому, что газы подобны (одинаковые ν и C_V); для разных газов температура взвешивалась бы произведениями νC_V.



Температуры выравниваются к 400 К; их сумма $T_1 + T_2 = 800$ К в любой момент остаётся постоянной.

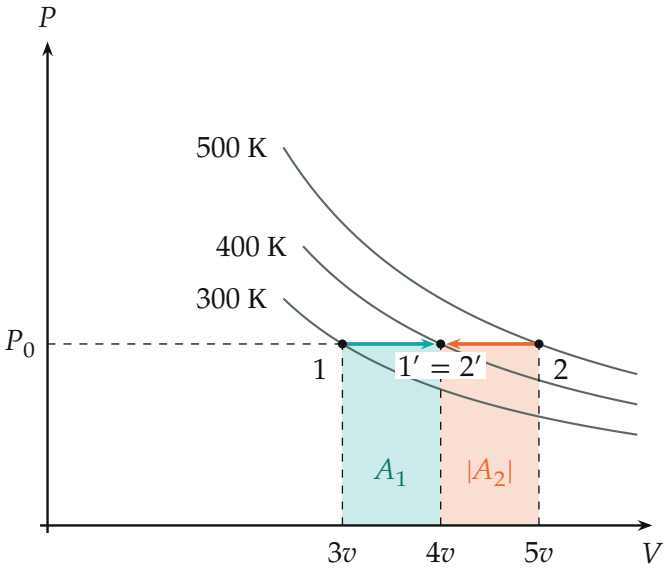
Пункт 3.

3. Давление в ходе процесса постоянно. Сложим уравнения Клапейрона — Менделеева для двух газов в произвольный момент: $PV_1 = \nu R T_1$, $PV_2 = \nu R T_2$, откуда

$$P\,(V_1 + V_2) = \nu R\,(T_1 + T_2).$$

Сумма объёмов $V_1 + V_2$ равна объёму сосуда и не меняется. Сумма температур тоже не меняется: из сохранения энергии $\nu C_V (T_1 + T_2) =$

const $= \nu C_V(T_{10} + T_{20})$. Значит, $P = P_0 = \text{const}$: каждый газ участвует в изобарном процессе — азот нагревается и расширяется, кислород остывает и сжимается. Объёмы при этом пропорциональны температурам ($V = \nu RT/P_0$), в конце $V_1 = V_2$ (оба газа при 400 К).



Изотермы $PV = \nu RT$ и обе изобары на одной линии $P = P_0$: азот идёт $1 \to 1'$ вправо (бирюзовая стрелка), кислород $2 \to 2'$ влево (морковная). Заштрихованные площади — работы $P_0\Delta V$; конечное состояние у газов одно и то же.

4. Теплота, полученная азотом. Запишем первое начало термодинамики для азота (газ в изобарном процессе, $A_1 = P_0(V_1 - V_{01})$ — работа азота над поршнем):

$$Q = \Delta U_1 + A_1, \qquad \Delta U_1 = \nu C_V(T - T_{10}),$$
$$A_1 = P_0\Delta V_1 = \nu R(T - T_{10}).$$

Последнее равенство — уравнение Клапейрона — Менделеева для раз-

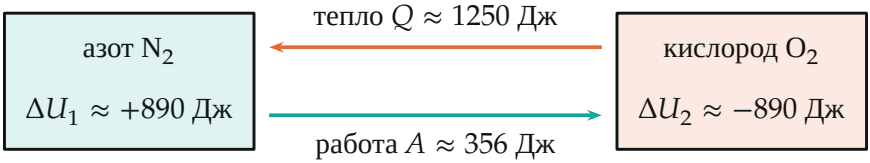
ности состояний при $P_0 = \text{const}$. Тогда

$$Q = \nu\,(C_V + R)\,(T - T_{10}) = \nu \cdot \frac{7}{2}R \cdot 100\ \text{K}$$
$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{2} \cdot 8{,}31 \cdot 100\ \text{Дж} = 1246{,}5\ \text{Дж} \approx 1250\ \text{Дж}.$$

Знак положителен: азот в действительности получает тепло. Так как сосуд теплоизолирован, всё это тепло пришло от кислорода через поршень: кислород передал азоту $Q \approx 1{,}25$ кДж.

Обратите внимание: нельзя искать эту величину как $\nu C_V \cdot 100 \approx 890$ Дж, то есть как убыль внутренней энергии кислорода. Кислород не только остывает, но и сжимается: над ним совершают работу A_2, поэтому тепла он отдаёт больше, чем теряет внутренней энергии.

5. Второй способ: из энергии кислорода. Для кислорода $\Delta U_2 = \nu C_V(T - T_{20}) = -\nu C_V \cdot 100 \approx -890$ Дж, а работа газа $A_2 = P_0\Delta V_2 = \nu R(T - T_{20}) = -\nu R \cdot 100 \approx -356$ Дж (газ сжимают). Теплота, полученная кислородом, $Q_2 = \Delta U_2 + A_2 = -\nu(C_V + R) \cdot 100 \approx -1250$ Дж: кислород отдал столько же, сколько получил азот.



Энергетический баланс: тепло Q идёт от кислорода к азоту, а работа A — от азота через поршень обратно к кислороду. Внутренние энергии меняются на одну и ту же величину с разными знаками.

Проверка. Размерность: $\nu(C_V+R)\Delta T$ — моль · Дж/(моль·К) · К = Дж. Суммы по двум газам: $\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$, $A_1 + A_2 = 0$, $Q_1 + Q_2 = 0$ — как и положено для замкнутой теплоизолированной системы. Предельный случай: если бы поршень был закреплён, азот получил бы лишь $\nu C_V \cdot 100 \approx 890$ Дж; у подвижного поршня часть тепла ($\nu R \cdot 100 \approx 356$ Дж) уходит на работу, поэтому 1250 Дж больше. Смысл: чтобы нагреть азот

на 100 К при постоянном давлении, нужна теплоёмкость $C_P = \frac{7}{2}R$, а не $\frac{5}{2}R$.

Ответ. 1) $\frac{V_{01}}{V_{02}} = \frac{3}{5}$; 2) $T = 400$ К; 3) $Q \approx 1250$ Дж (точнее 1246,5 Дж).