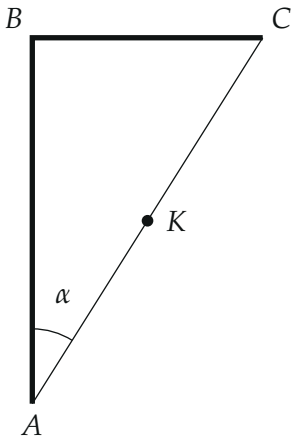
Заряженные пластины двугранного угла

Задача 3. [Физтех 2021/22, 11 класс, задача 3] Две бесконечные плоские прямоугольные пластины AB и BC перпендикулярны друг к другу и образуют двугранный угол с ребром B. На рисунке показано сечение угла плоскостью, перпендикулярной ребру B.



1. Пластина BC заряжена с постоянной поверхностной плотностью заряда. Угол $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Во сколько раз увеличится напряжённость электрического поля в точке K на середине отрезка AC, если пластину AB тоже зарядить с такой же поверхностной плотностью заряда?
2. Пластины BC и AB заряжены равномерно с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1 = 2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$ соответственно. Угол $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$. Найти напряжённость электрического поля в точке K на середине отрезка AC.

▲ **Решение. Что происходит.** Пластины бесконечны вдоль ребра B (перпендикулярно рисунку), а в сечении — отрезки конечной ширины BC и AB. Значит, каждая пластина — полоса, и поле в каждой плоскости, перпендикулярной ребру, одно и то же: задача плоская. Здесь работает

принцип суперпозиции: поле в точке K — сумма полей двух полос, а поле полосы найдём, разбив её на длинные заряженные нити и сложив их поля. Решающий факт: точка K равноудалена от краёв каждой полосы, и это сильно упрощает счёт.

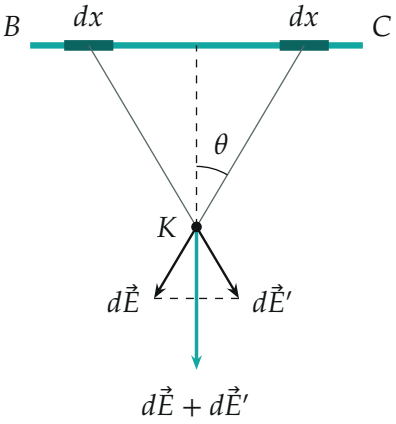
Обозначения. Ось x — вдоль BC вправо, ось y — вдоль BA вниз. σ_1, σ_2 — поверхностные плотности зарядов полос BC и AB (в пункте 1 обе равны σ). ε_0 — электрическая постоянная. Величины φ_1, φ_2 — плоские углы, под которыми из точки K видны полосы BC и AB.

Пункт 1.

1. Поле тонкой нити. Длинная нить (бесконечная прямая) с линейной плотностью заряда λ создаёт на расстоянии r поле $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$, направленное по перпендикуляру к нити (от неё при $\lambda > 0$). Узкая полоска полосы шириной dx несёт на единице длины заряд $\lambda = \sigma\, dx$ и является такой нитью:

$$dE = \frac{\sigma\, dx}{2\pi\varepsilon_0\, r}.$$

2. Симметрия: поле полосы направлено перпендикулярно ей. Точка K лежит на середине гипотенузы прямоугольного треугольника ABC, а медиана к гипотенузе равна её половине: $KA = KB = KC$ (точки A, B, C лежат на окружности с центром K). Значит, K равноудалена от краёв полосы BC, то есть лежит на её серединном перпендикуляре. Для каждой полоски есть зеркальная относительно этого перпендикуляра, их поля в K имеют одинаковую вертикальную составляющую и противоположные горизонтальные. Горизонтальные составляющие гасятся, поле полосы BC в K направлено строго перпендикулярно ей, а у полосы AB — перпендикулярно AB.

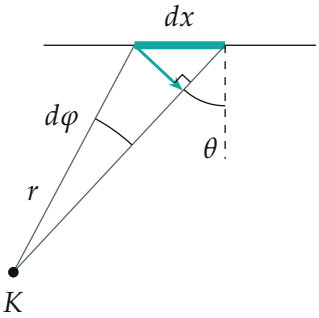


Две полоски, зеркальные относительно перпендикуляра KM к полосе BC, создают в K поля $d\vec{E}$ и $d\vec{E}'$ (чёрные); горизонтальные составляющие взаимно гасятся, сумма (бирюзовая) идёт перпендикулярно полосе. θ — угол между направлением на полоску и перпендикуляром к полосе.

3. Сколько даёт одна полоска. Расстояние от K до полоски обозначим r, угол — θ. Перпендикулярная полосе составляющая поля полоски

$$dE_\perp = dE\cos\theta = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dx\cos\theta}{r} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\,d\varphi.$$

Здесь $d\varphi = \dfrac{dx\cos\theta}{r}$ — угол, под которым из K видна полоска: её проекция на дугу окружности радиуса r равна $dx\cos\theta$, а длина дуги — $r\,d\varphi$.



Увеличенный участок: полоска dx видна из K под малым углом $d\varphi$; дуга радиуса r между лучами имеет длину $r\,d\varphi = dx\cos\theta$ (бирюзовый отрезок перпендикулярен лучу).

4. Складываем все полоски: поле полосы. Суммируем по всей полосе: углы $d\varphi$ складываются в полный угол φ, под которым из K видна вся полоса. Поле полосы направлено перпендикулярно ей и по модулю равно

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\,\varphi.$$

Проверка формулы: для бесконечной плоскости $\varphi = \pi$ и $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$, что совпадает с известным полем равномерно заряженной плоскости.

Обратите внимание: «бесконечность» пластин относится только к направлению вдоль ребра. В сечении пластины имеют конечную ширину, поэтому поле полосы нельзя записывать как $\sigma/(2\varepsilon_0)$ — множитель φ/π меньше единицы. Кроме того, поле полосы в общей точке имеет составляющую и вдоль полосы; в точке K она равна нулю только из-за равноудалённости K от краёв, как показано выше.

5. Углы, под которыми из K видны полосы. Треугольник KBC равнобедренный: $KB = KC$. Его угол при вершине C равен углу C прямоугольного треугольника ABC, то есть $\angle KCB = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Поэтому угол при вершине K

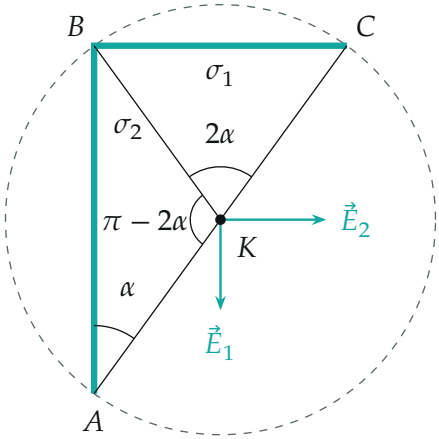
$$\varphi_1 = \angle BKC = \pi - 2\Big(\frac{\pi}{2} - \alpha\Big) = 2\alpha.$$

Точки A, K, C лежат на одной прямой, поэтому угол, под которым видна полоса AB, дополняет φ_1 до развёрнутого: $\varphi_2 = \angle AKB = \pi - 2\alpha$.

6. Поля в K через углы. По формуле пункта 4 с $\varphi_1 = 2\alpha$, $\varphi_2 = \pi - 2\alpha$ получаем модули и направления: поле полосы BC перпендикулярно ей (вдоль y), поле полосы AB перпендикулярно ей (вдоль x); оба направлены от пластин (при положительных σ):

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\pi\varepsilon_0}\,2\alpha = \frac{\sigma_1\alpha}{\pi\varepsilon_0}, \qquad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\pi\varepsilon_0}\,(\pi - 2\alpha) = \frac{\sigma_2}{\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{\pi}{2} - \alpha\Big).$$

Пластины перпендикулярны, поэтому $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$ и $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$.

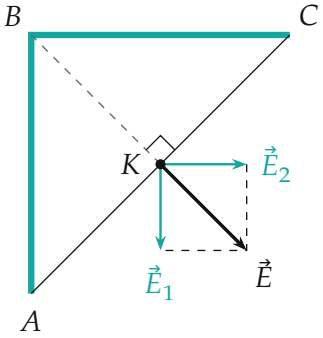


Сечение (для наглядности $\alpha = 36°$): окружность с центром K проходит через A, B, C (пунктир). Углы при K: 2α (полоса BC) и $\pi - 2\alpha$ (полоса AB); поля $\vec{E}_1 \perp BC$ и $\vec{E}_2 \perp AB$ направлены от заряженных полос.

Пункт 1. При $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ и равных $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ получаем $\varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ и $E_1 = E_2 = \dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}$. Первоначально была заряжена только BC, и поле в K равнялось E_1. После зарядки AB поле стало равно $\sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{2}\,E_1$:

$$\frac{E}{E_1} = \sqrt{2}.$$

То же следует из симметрии: при $\alpha = \pi/4$ треугольник ABC равнобедренный, отражение в прямой BK меняет пластины местами, значит $E_1 = E_2$; а перпендикулярные векторы одинаковой длины дают сумму $\sqrt{2}E_1$.



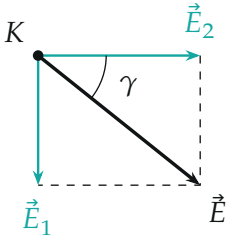
Пункт 1 ($\alpha = \pi/4$): поля пластин равны по модулю и перпендикулярны; суммарное поле — диагональ квадрата, то есть в $\sqrt{2}$ раз больше каждого. Угол $BKC = 2\alpha = 90°$ (значок у K).

Пункт 2. Теперь $\sigma_1 = 2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$, $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$:

$$E_1 = \frac{2\sigma}{\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\pi}{7} = \frac{2}{7}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{4}{14}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad E_2 = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \frac{5}{14}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{\sigma}{14\varepsilon_0}\sqrt{16+25} = \frac{\sqrt{41}}{14}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \approx 0{,}457\,\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Вектор $\vec{E}$ направлен вниз и вправо под углом γ к оси x, где $\tan\gamma = E_1/E_2 = 4/5$, то есть $\gamma \approx 38{,}7°$.



Пункт 2: сложение $\vec{E}_1$ (вдоль y) и $\vec{E}_2$ (вдоль x) в масштабе; $E_1 : E_2 = 4 : 5$, $E_1 = 2\sigma/(7\varepsilon_0)$, $E_2 = 5\sigma/(14\varepsilon_0)$.

Проверка. Размерность: σ/ε_0 — напряжённость поля, В/м. Предельный случай: при $\alpha \to \pi/2$ полоса BC делается всё шире, $\varphi_1 \to \pi$ и

$E_1 \to \sigma_1/(2\varepsilon_0)$, как у бесконечной плоскости, а полоса AB видна из K под углом $\varphi_2 \to 0$, и $E_2 \to 0$. Второй способ для пункта 1 — симметрия — дал тот же результат $\sqrt{2}$. Дополнительно ответы проверены численным интегрированием полей двух полос по их ширине: получились $\sqrt{2}$ и $0{,}4574\,\sigma/\varepsilon_0$. Смысл: поле зависит не от размеров пластин, а только от углов, под которыми они видны из точки K.

Ответ. 1) в $\sqrt{2}$ раз; 2) $E = \dfrac{\sqrt{41}}{14}\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \approx 0{,}457\,\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.