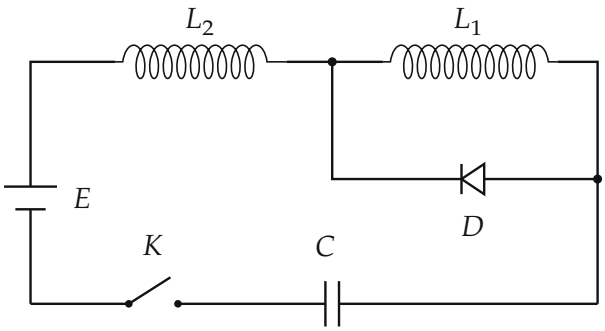
Колебательный контур с двумя катушками и диодом

Задача 4. [Физтех 2021/22, 11 класс, задача 4] Электрическая цепь собрана из идеальных элементов: источника с ЭДС E, катушек с индуктивностями $L_1 = 2L$, $L_2 = L$, конденсатора ёмкостью C, диода D (см. рис.). Ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен, тока в цепи нет. После замыкания ключа устанавливаются колебания тока в L_1.



1. Найдите период T этих колебаний.
2. Найдите максимальный ток I_{M1}, текущий через катушку L_1.
3. Найдите максимальный ток I_{M2}, текущий через катушку L_2.

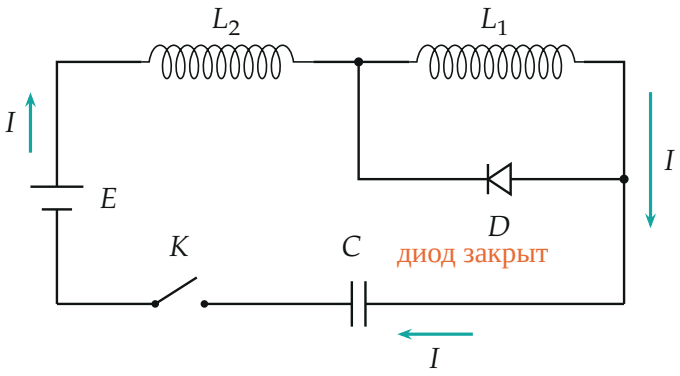
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача с диодом: состояние диода — «закрыт» или «открыт» — заранее неизвестно, поэтому сначала предполагаем одно состояние, решаем, а потом проверяем предположение знаком напряжения или тока. Сначала диод закрыт, и цепь — обычный LC-контур с источником: катушки L_2 и L_1 включены последовательно. Ток растёт, достигает максимума, и в этот момент напряжение на L_1 меняет знак. Диод открывается и замыкает катушку L_1 накоротко: её ток перестаёт меняться, а оставшийся контур с L_2 колеблется дальше. Ключевые законы: второй закон Кирхгофа для контура с катушками (напряжение на катушке $L\,dI/dt$) и сохранение энергии.

Обозначения. I — ток в первой фазе (диод закрыт), q — заряд конденсатора, $U_C = q/C$. У источника длинная пластина (на рисунке верхняя) — положительный полюс, поэтому ток идёт по часовой стрелке: от

плюса через L_2, затем через L_1 и C. Напряжение на L_1 — $V_{L_1} = L_1 \dfrac{dI}{dt}$ (потенциал левого конца минус потенциал правого). Стрелка диода на рисунке направлена влево, значит, диод проводит ток справа налево и открывается, когда потенциал справа выше, то есть при $V_{L_1} < 0$.

Пункт 1.

1. Первая фаза: диод закрыт. Сразу после замыкания ключа ток растёт, $dI/dt > 0$, значит $V_{L_1} > 0$: потенциал слева выше, диод находится под обратным напряжением и заперт, ток через него не идёт. Предположение «диод закрыт» согласовано. Ток один и тот же во всей цепи (источник, L_2, L_1, C).



Фаза 1: диод закрыт, одинаковый ток I идёт через E, L_2, L_1 и C по часовой стрелке.

2. Второй закон Кирхгофа для контура. Сумма падений напряжения на катушках и конденсаторе равна ЭДС источника:

$$E = (L_1 + L_2)\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C}, \qquad I = \frac{dq}{dt}.$$

Это колебания около положения равновесия $q_0 = CE$ (там $dI/dt = 0$) с частотой $\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \dfrac{1}{\sqrt{3LC}}$. Начальные условия $q(0) = 0$,

$I(0) = 0$ дают

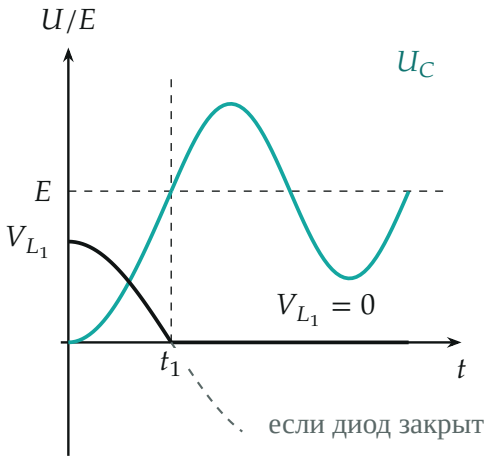
$$U_C = E\,(1 - \cos\omega_1 t), \qquad I = E\sqrt{\frac{C}{L_1 + L_2}}\,\sin\omega_1 t.$$

Ток максимален при $\omega_1 t_1 = \pi/2$ (в этот момент $U_C = E$, $dI/dt = 0$):

$$I_M = E\sqrt{\frac{C}{L_1 + L_2}} = E\sqrt{\frac{C}{3L}}.$$

Второй способ (энергия). Когда конденсатор зарядился до $q = CE$, источник совершил работу $Eq = CE^2$. Энергия конденсатора $\frac{1}{2}CE^2$, остальная половина ушла в катушки: $\frac{1}{2}(L_1 + L_2)I_M^2 = \frac{1}{2}CE^2$, откуда тот же $I_M = E\sqrt{C/(L_1 + L_2)}$.

3. Диод открывается. Если бы диод остался закрытым, после t_1 было бы $dI/dt < 0$ и $V_{L_1} < 0$: потенциал справа выше, а это как раз прямое направление диода (на рисунке — график V_{L_1}). Значит, предположение нарушилось: диод открывается ровно в момент t_1, когда ток максимален.

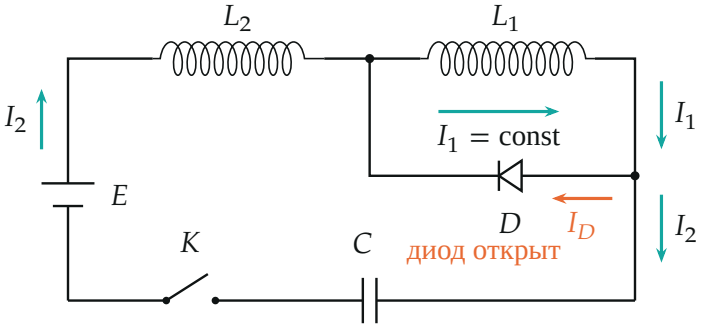


Во второй фазе напряжение на L_1 не может стать отрицательным: диод открывается и держит $V_{L_1} = 0$. Серый пунктир — что было бы, если бы диод остался закрытым.

4. Вторая фаза: диод открыт. Идеальный открытый диод имеет нулевое напряжение, значит, и на катушке L_1 напряжение нулевое: $L_1 \dfrac{dI_1}{dt} = 0$. Ток катушки не меняется скачком, поэтому в момент t_1 он равен I_M и остаётся таким:

$$I_1 = I_M = \text{const}.$$

Катушка L_1 с диодом образует замкнутый контур: ток I_1 течёт по L_1 и возвращается через диод. Ток через остальные элементы (источник, L_2, конденсатор) обозначим I_2; он делится в узле: $I_2 = I_1 - I_D$, где $I_D \geq 0$ — ток через диод.



Фаза 2: ток I_1 через L_1 постоянен, часть тока замыкается через диод; через L_2 и C идёт ток $I_2 = I_1 - I_D$.

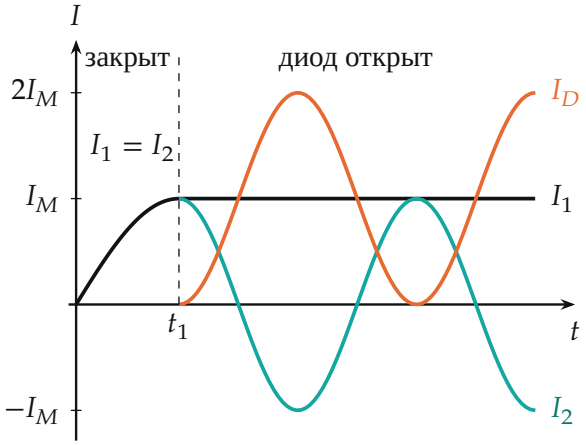
5. Колебания в контуре E, L_2, C. Запишем второй закон Кирхгофа для контура, в который не входит L_1 (его напряжение равно нулю):

$$E = L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{q}{C}, \qquad I_2 = \frac{dq}{dt}.$$

Снова колебания около $q_0 = CE$, теперь с периодом $T = 2\pi\sqrt{L_2 C} = 2\pi\sqrt{LC}$. В момент t_1: $q = CE$ и $I_2 = I_M$, то есть ток максимален, значит, амплитуда колебаний тока равна I_M. С $\tau = t - t_1$:

$$I_2 = I_M \cos\frac{2\pi\tau}{T}, \qquad I_D = I_1 - I_2 = I_M\Big(1 - \cos\frac{2\pi\tau}{T}\Big),$$
$$U_C = E + \frac{E}{\sqrt{3}} \sin\frac{2\pi\tau}{T}.$$

Ток I_D всё время неотрицателен (от 0 до $2I_M$), то есть диод действительно остаётся открытым, предположение подтверждено. Амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе равна $I_M\sqrt{L_2/C} = E/\sqrt{3}$.



Токи по времени (единица времени — $\sqrt{LC}$): до t_1 токи I_1 и I_2 совпадают; после t_1 ток I_1 постоянен, I_2 колеблется между $+I_M$ и $-I_M$, ток диода — между 0 и $2I_M$.

Ответы по пунктам. Пункт 1. Вопрос — о периоде «этих колебаний», то есть колебаний тока в L_1 из условия. Но после момента t_1 ток через L_1 равен I_M и больше не меняется: он не колеблется, и формально период бесконечен, $T = \infty$. Так и в ключе организаторов. Колеблются токи через L_2, диод и конденсатор — их период $2\pi\sqrt{L_2C} = 2\pi\sqrt{LC}$, но о них пункт 1 не спрашивает; этот период пригодится, если в условии вы прочтёте «колебания тока в цепи».

Пункт 2. Через L_1 максимальный ток — тот, который он набрал в первой фазе и сохраняет: $I_{M1} = I_M = E\sqrt{C/(3L)}$.

Пункт 3. Через L_2 ток сначала растёт до I_M, затем колеблется между $+I_M$ и $-I_M$, поэтому максимальный по модулю ток $I_{M2} = I_M = E\sqrt{C/(3L)}$.

Обратите внимание: диод нельзя считать всё время закрытым. Тогда получились бы колебания всей цепи с периодом $2\pi\sqrt{3LC}$, и ток через L_1 менял бы знак; в действительности при $dI/dt < 0$ диод открывается, ток

L_1 замирает на значении I_M, а период колебаний в оставшемся контуре равен $2\pi\sqrt{LC}$.

Проверка. Размерность: $E\sqrt{C/L}$ — вольт на $\sqrt{\text{Ф/Гн}}$, то есть вольт на сименс, ампер. Предел: при $L_1 \to 0$ диод ни на что не влияет и $I_M = E\sqrt{C/L_2}$, как у обычного контура с одной катушкой. Дополнительно я решил численно уравнения цепи с идеальным диодом (диод открывается при $V_{L_1} < 0$): момент открытия $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{3LC}$, $\max I_1 = \max I_2 = 0{,}577\,E\sqrt{C/L}$, $\min I_2 = -0{,}577\,E\sqrt{C/L}$, максимум тока диода $1{,}155\,E\sqrt{C/L}$, минимум 0 — как в формулах. Смысл: источник один раз «накачивает» катушку L_1 током I_M, а диод запирает этот ток в своём контуре навсегда; дальше колеблются только L_2 и конденсатор.

Ответ. 1) $T = \infty$: ток через L_1 после первого максимума постоянен и не колеблется (колеблются только токи L_2, C и диода, с периодом $2\pi\sqrt{LC}$); 2) $I_{M1} = E\sqrt{C/(3L)}$; 3) $I_{M2} = E\sqrt{C/(3L)}$.