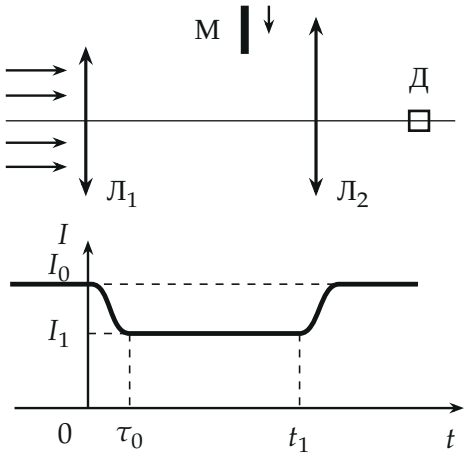
Две линзы и мишень, ток фотодетектора

Задача 5. [Физтех 2021/22, 11 класс, задача 5] Оптическая система состоит из двух соосных тонких линз $Л_1$ и $Л_2$ (см. рис.) с фокусным расстоянием F_0 у каждой. Расстояние между линзами $3F_0$. Диаметры линз одинаковы и равны D, причём D значительно меньше F_0. На линзу $Л_1$ падает параллельно оси системы пучок света с одинаковой интенсивностью в сечении пучка. Прошедший через обе линзы свет фокусируется на фотодетекторе Д, на выходе которого сила тока пропорциональна мощности падающего на него света. Круглая непрозрачная мишень M, плоскость которой перпендикулярна оси системы, движется с постоянной скоростью V перпендикулярно оси системы так, что центр мишени пересекает ось на расстоянии $2F_0$ от $Л_1$. На рисунке показана зависимость тока I фотодетектора от времени t (секундомер включён в момент начала уменьшения тока). $I_1 = \dfrac{3I_0}{4}$. Известными считать величины F_0, D, τ_0.



1. Найдите расстояние между линзой $Л_2$ и фотодетектором.
2. Определите скорость V движения мишени.
3. Определите t_1.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача состоит из двух частей. Сначала геометрическая оптика: $Л_1$ собирает параллельный пучок в своём фо-

кусе, который для $Л_2$ служит точечным источником, и формула тонкой линзы даёт положение детектора. Затем фотометрия: ток пропорционален мощности света, дошедшего до детектора, а мощность — площади сечения пучка, не перекрытой мишенью. Поэтому по току находим размер мишени (отношение площадей), а по времени спада — скорость. Важно, что $Л_2$ тоже ограничивает пучок: до детектора доходит не весь свет, а только та часть, которая попала в оправу $Л_2$ (диаметр D).

Обозначения. Ось z — вдоль оптической оси, $z = 0$ на $Л_1$. F — фокус $Л_1$ ($z = F_0$). $D_1 = AB$ — диаметр того сечения пучка в плоскости мишени ($z = 2F_0$), свет из которого доходит до детектора; D_M — диаметр мишени; x — расстояние от $Л_2$ до детектора. $D \ll F_0$, поэтому лучи околоосевые, формула тонкой линзы применима.

Пункт 1.

1. Куда собирает свет первая линза. Параллельный пучок после тонкой линзы пересекается в её фокусе F, на расстоянии F_0 от $Л_1$. Дальше свет расходится из этой точки конусом. Расстояние от F до $Л_2$ равно $3F_0 - F_0 = 2F_0$, то есть для $Л_2$ точка F — точечный источник на расстоянии $d = 2F_0$ перед линзой.

2. Формула тонкой линзы для $Л_2$. Источник на расстоянии $d = 2F_0$, изображение на расстоянии x за линзой, фокусное расстояние F_0:

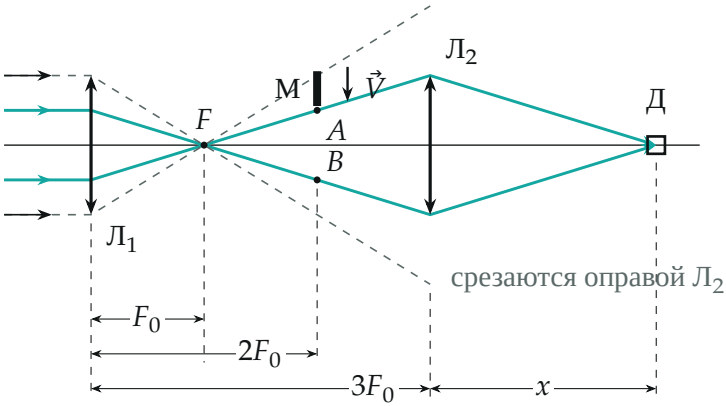
$$\frac{1}{2F_0} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F_0} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = \frac{1}{2F_0} \;\Rightarrow\; x = 2F_0.$$

Фотодетектор стоит в изображении точки F, поэтому свет, прошедший $Л_2$, собирается на нём в одну точку, и вся мощность попадает на детектор.

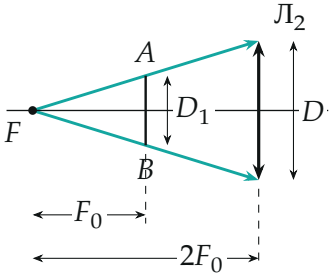
Пункт 2.

3. Какой свет доходит до детектора. Луч, попавший на $Л_1$ на высоте h от оси, пересекает ось в F и идёт дальше под углом h/F_0, поэтому на $Л_2$ (на расстоянии $2F_0$ от F) он попадает на высоте $2h$. Линза $Л_2$ пропускает его, если $2h \le D/2$, то есть $h \le D/4$. Лучи с большим h минуют $Л_2$ и до детектора не доходят. Значит, на детектор работает только центральная часть падающего пучка радиуса $D/4$. В плоскости мишени ($z = 2F_0$, на расстоянии F_0 от F) её сечение — круг радиуса $D/4$, то есть диаметра

$D_1 = AB = D/2$. Интенсивность в нём одинакова: линза Л$_1$ равномерно преобразует равномерный пучок (лучи с высоты h приходят на высоту h в плоскости $2F_0$), так что мощность света, дошедшего до детектора, пропорциональна площади этого круга.



Ход лучей: бирюзовые лучи с высот $\pm D/4$ на Л$_1$ доходят до краёв Л$_2$ и далее на детектор Д; серые пунктирные (с высот $\pm D/2$) срезаются оправой Л$_2$. A, B — границы бирюзового пучка в плоскости мишени. Масштаб по вертикали условный.



Подобные треугольники: сечение пучка на расстоянии F_0 от вершины F вдвое меньше, чем на расстоянии $2F_0$, где лучи упираются в края Л$_2$ (диаметр D): $D_1 = D/2$.

4. Размер мишени из тока. Мишень (непрозрачная, диаметр D_M) перекрывает часть круга диаметра D_1 и уменьшает мощность, а значит,

ток. Ток перестаёт убывать, когда мишень вошла в пучок целиком: дальше перекрытая площадь равна площади самой мишени. Тогда относительное уменьшение тока равно отношению площадей:

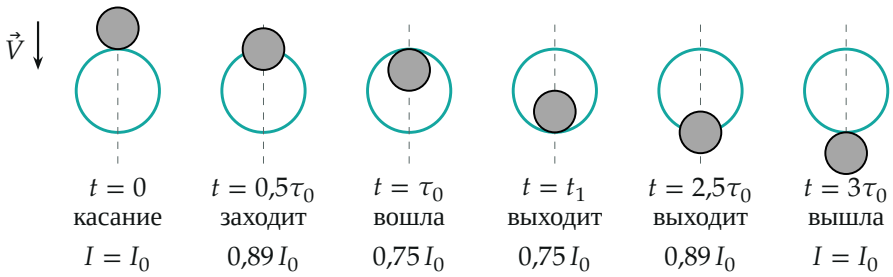
$$\frac{I_0 - I_1}{I_0} = \frac{\pi D_M^2/4}{\pi D_1^2/4} = \left(\frac{D_M}{D_1}\right)^2.$$

По условию $I_1 = \frac{3}{4} I_0$, поэтому $\frac{I_0 - I_1}{I_0} = \frac{1}{4}$, откуда $\frac{D_M}{D_1} = \frac{1}{2}$ и

$$D_M = \frac{D_1}{2} = \frac{D}{4}.$$

5. Скорость из времени спада. Спад тока начинается, когда мишень касается границы круга (её передний край достигает границы), и заканчивается, когда мишень целиком внутри круга. За это время τ_0 мишень сдвигается ровно на свой диаметр D_M (передний край прошёл от границы вглубь круга на D_M, а задний — дошёл до границы):

$$V = \frac{D_M}{\tau_0} = \frac{D}{4\tau_0}.$$



Вид вдоль оси: бирюзовый круг — пучок диаметра D_1, серый кружок — мишень диаметра $D_1/2$, она движется вниз. Под кадрами — время и ток в долях I_0 (за единицу длины принят радиус пучка, $V = 1/\tau_0$ в этих единицах).

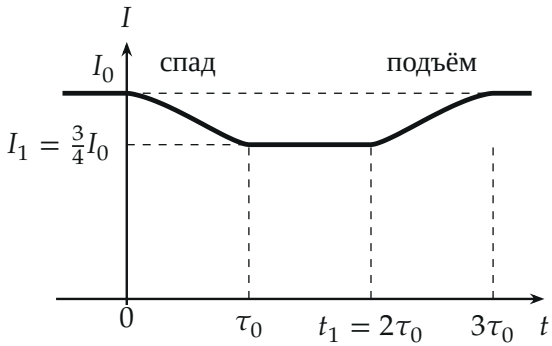
Пункт 3.

6. Когда ток снова начнёт расти. Рост тока начинается, когда мишень начинает выходить из круга: её передний край (нижний) достиг

противоположной границы. Передний край прошёл расстояние, равное диаметру круга $D_1 = D/2$, со скоростью V:

$$t_1 = \frac{D_1}{V} = \frac{D/2}{D/(4\tau_0)} = 2\tau_0.$$

Второй способ (по центру мишени). Центр мишени движется вдоль диаметра круга: в начале спада он на расстоянии $(D_1 + D_M)/2 = 3D/8$ от центра круга, подъём начинается на расстоянии $(D_1 - D_M)/2 = D/8$ по другую сторону. Путь центра $3D/8 + D/8 = D/2$, поэтому $t_1 = \dfrac{D/2}{V} = 2\tau_0$ — тот же результат.



Ток по времени, построенный по формуле площади пересечения кругов: спад длится τ_0, затем полка $I_1 = \frac{3}{4}I_0$ до $t_1 = 2\tau_0$, подъём симметричен спаду и кончается в $3\tau_0$.

Обратите внимание: диаметр пучка в плоскости мишени определяется оправой $Л_2$ ($D/2$), а не размером D падающего пучка: без этого нельзя связать I_1 с размером мишени.

Проверка. Размерности: x — длина, $V = D/(4\tau_0)$ — скорость, t_1 — время. График симметричен: от начала спада до конца подъёма мишень проходит $D_1 + D_M = \frac{3}{4}D$ за $3\tau_0$; спад, полка и подъём длятся по τ_0, что и показано на рисунке. Смысл: по глубине и времени спада восстанавливаются размер мишени и её скорость.

Ответ. 1) $x = 2F_0$; 2) $V = \dfrac{D}{4\tau_0}$; 3) $t_1 = 2\tau_0$.