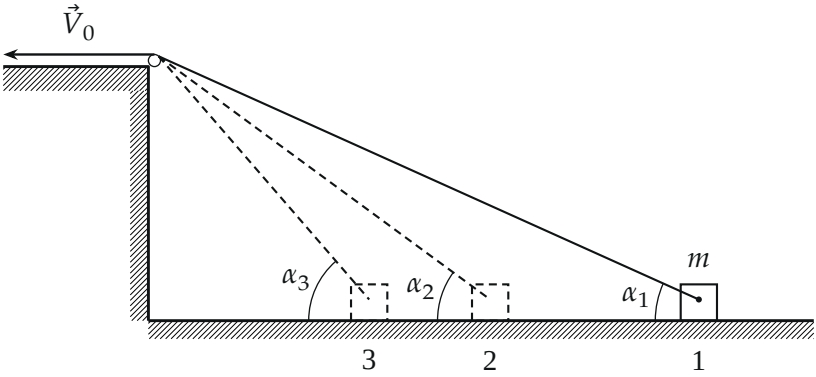
Груз, подтягиваемый тросом через блок

Задача 1. [Физтех 2021/22, 11 класс, задача 1] Груз массой m подтягивается по гладкой горизонтальной поверхности к стене с помощью лебёдки, неподвижного небольшого лёгкого блока и лёгкого троса (см. рис.). Трос вытягивается лебёдкой с постоянной скоростью V_0. Груз последовательно проходит точки 1, 2 и 3, для которых $\sin\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\sin\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha_3 = \frac{3}{4}$. От точки 1 до точки 2 груз перемещается за время t_{12}.

1. Найти скорость V_1 груза при прохождении точки 1.
2. Найти работу лебёдки A_{12} при перемещении груза из точки 1 в точку 2.
3. Найти время t_{23} перемещения груза из точки 2 в точку 3.



▲ **Решение. Что происходит.** Лебёдка тянет трос с постоянной скоростью V_0, но груз едет не с ней: трос наклонён к полу под углом α, а скорость груза горизонтальна. Это задача на кинематическую связь через нерастяжимый трос. Главная идея: участок троса от блока до груза укорачивается ровно со скоростью V_0. Отсюда связь скоростей (пункт 1) и время (пункт 3). Трос и блок лёгкие, поэтому работа лебёдки целиком переходит в работу силы натяжения на грузе, а её находим по теореме о кинетической энергии (пункт 2).

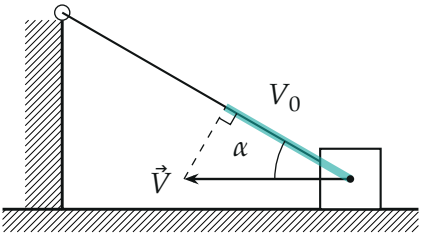
Обозначения. H — высота блока над полом (в ответ не войдёт); $\ell = H/\sin\alpha$ — длина участка троса от блока до груза; V — скорость груза; α — угол между тросом и полом. Блок небольшой, поэтому считаем его точкой. Нужные значения:

	точка 1	точка 2	точка 3
$\sin\alpha$	$1/3$	$1/2$	$3/4$
$\cos\alpha$	$2\sqrt{2}/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{7}/4$

Пункт 1.

1. Связь скоростей через проекции. Трос нерастяжим: расстояние между двумя точками троса не меняется, поэтому проекции их скоростей на трос равны. Точка троса у груза движется вместе с грузом со скоростью $\vec{V}$, а точка троса у лебёдки — со скоростью V_0 вдоль троса. Значит, проекция $\vec{V}$ на направление троса равна V_0:

$$V\cos\alpha = V_0.$$



Скорость груза и её проекция на трос (бирюзовый отрезок): $V\cos\alpha = V_0$. На рисунке $\alpha = 30°$.

2. Тот же результат через длину троса. Расстояние от блока до груза $\ell = H/\sin\alpha$, а груз у пола смещается на $x = H\operatorname{ctg}\alpha$. Скорость груза $V = -\dot{x} = H\dot{\alpha}/\sin^2\alpha$, скорость сокращения троса $-\dot{\ell} = H\cos\alpha\,\dot{\alpha}/\sin^2\alpha = V\cos\alpha$. Она равна V_0, и снова $V\cos\alpha = V_0$.

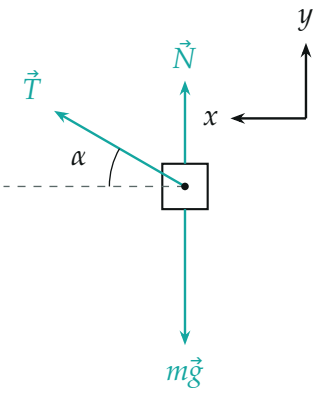
3. Скорость в точке 1.

$$V_1 = \frac{V_0}{\cos\alpha_1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\,V_0 = \frac{3\sqrt{2}}{4}\,V_0 \approx 1{,}06\,V_0.$$

Обратите внимание: скорость груза не равна скорости троса, она больше: $\cos\alpha < 1$. Чем ближе груз к стене, тем больше α, меньше $\cos\alpha$ и больше V: груз разгоняется, хотя трос тянут равномерно.

Пункт 2.

4. Силы на груз. На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции пола $\vec{N}$ (обе вертикальны) и сила натяжения троса $\vec{T}$ вдоль троса. Трос и блок лёгкие, а блок без трения, поэтому натяжение одно и то же по всей длине троса.



Силы, действующие на груз; ось x — вдоль пола к стене. Длины стрелок условные.

5. Работа лебёдки равна работе силы $\vec{T}$ на грузе. Лебёдка тянет трос с силой T, и точка приложения смещается на $V_0\,dt$: за малое время dt она совершает работу $T\,V_0\,dt$. Работа силы $\vec{T}$ на грузе за то же время равна $T\cos\alpha\cdot V\,dt$, а $V\cos\alpha = V_0$. Работы совпали: на трос и блок, лёгкие и без трения, энергия не тратится. Поэтому

$$A_{12} = A_T \text{ (на грузе)}.$$

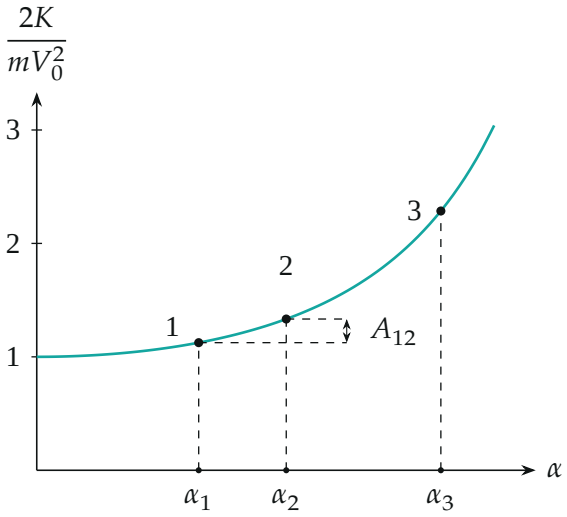
Силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ вертикальны, перемещение горизонтально, их работа равна нулю.

6. Теорема о кинетической энергии для груза между точками 1 и 2. Её удобно применять: натяжение T неизвестно и меняется, а скорости в обеих точках известны из пункта 1. Скорость в точке 2 — $V_2 =$

$V_0/\cos\alpha_2$:

$$A_{12} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha_2} - \frac{1}{\cos^2\alpha_1}\right)$$
$$= \frac{mV_0^2}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{9}{8}\right) = \frac{5}{48}mV_0^2.$$

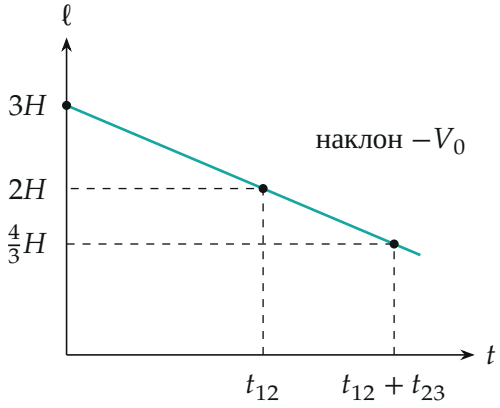
Знак «плюс»: груз разгоняется, лебёдка совершает положительную работу.



Кинетическая энергия груза в долях $mV_0^2/2$ растёт как $1/\cos^2\alpha$. Работа лебёдки A_{12} — разность значений в точках 1 и 2 (в долях $mV_0^2/2$ она равна $5/24$).

Пункт 3.

7. Длина троса меняется линейно. Участок от блока до груза укорачивается со скоростью V_0, то есть $\ell(t) = \ell_1 - V_0 t$. Для точек $1, 2, 3$ длина $\ell = H/\sin\alpha$ равна $3H$, $2H$ и $\frac{4}{3}H$.



Длина ℓ участка троса от блока до груза убывает линейно, поэтому равные доли ℓ соответствуют равным долям времени.

8. Время. Убыль длины за время равна V_0 на это время:

$$V_0 t_{12} = 3H - 2H = H, \qquad V_0 t_{23} = 2H - \tfrac{4}{3}H = \tfrac{2}{3}H.$$

Делим второе равенство на первое: H и V_0 сокращаются,

$$t_{23} = \frac{2}{3}\, t_{12}.$$

Проверка. Размерности: V_1 в единицах V_0; A_{12} — mV_0^2, то есть энергия; t_{23} — время. Предел: при $\alpha \to 0$ (груз далеко, трос почти горизонтален) $V \to V_0$, $\cos\alpha \to 1$, как и должно быть. Независимая проверка по пройденному пути: груз смещается на $x = H\operatorname{ctg}\alpha$, то есть на $1{,}096H$ от точки 1 до 2 и на $0{,}850H$ от 2 до 3. Средние скорости $1{,}096\,H/t_{12} = 1{,}096\,V_0$ и $0{,}850\,H/t_{23} = 1{,}275\,V_0$ лежат между значениями V на концах участков ($1{,}06\,V_0$ и $1{,}15\,V_0$; $1{,}15\,V_0$ и $1{,}51\,V_0$) — согласуется. Смысл: груз ускоряется, потому что одинаковые куски троса «съедают» всё меньшие смещения по полу.

Ответ. 1) $V_1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\,V_0$; 2) $A_{12} = \dfrac{5}{48}\,mV_0^2$; 3) $t_{23} = \dfrac{2}{3}\,t_{12}$.