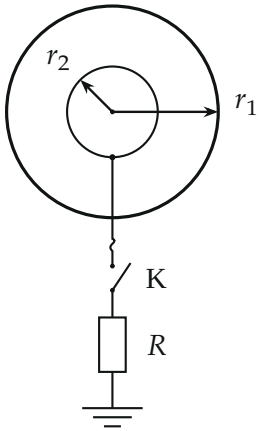
Сферический конденсатор с заземлением

Задача 3. [Физтех 2021/22, 11 класс, задача 3] Два тонкостенных полых проводящих шара (тонкостенные сферы) с общим центром и радиусами r_1 и r_2 образуют сферический конденсатор (см. рис.). На внешнем шаре находится положительный заряд Q, внутренний шар не заряжен и соединён с Землёй через ключ K и резистор R. Ключ замыкают.

1. Найти заряд q внутреннего шара после замыкания ключа.
2. Найти энергию W_0 электрического поля вне шаров до замыкания ключа.
3. Какое количество теплоты W выделится в резисторе R после замыкания ключа?

Сопротивление проводов, шаров и Земли не учитывать. Радиусы шаров значительно меньше расстояния между Землёй и шарами.



▲ **Решение. Что происходит.** Внешний шар заряжен, внутренний нет. Пока ключ разомкнут, внутри внешней сферы поля нет, и внутренний шар имеет тот же положительный потенциал, что и внешний. Когда ключ замыкают, этот потенциал выше потенциала Земли, и заряд стекает через резистор, пока потенциал внутреннего шара не станет равным потенциалу Земли. Далее потенциал Земли принимаем за нулевой: шары далеки от неё, поэтому потенциал Земли равен потенциалу бесконечности. Главные идеи: потенциал сферы складывается по принципу

суперпозиции (пункт 1), энергия поля — энергия конденсатора (пункты 2 и 3), а теплота в резисторе — убыль энергии поля.

Обозначения. $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Внешний шар — радиус r_1, внутренний — $r_2 < r_1$ (как на рисунке). Потенциал уединённой сферы радиуса r с зарядом q равен kq/r на сфере и внутри неё, а вне сферы на расстоянии $x > r$ от центра — kq/x (при нуле на бесконечности).

Пункт 1.

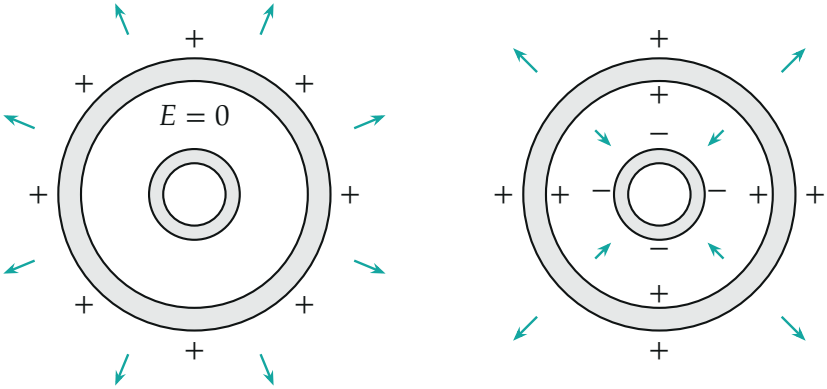
1. Потенциал внутреннего шара. Потенциал в любой точке — сумма потенциалов зарядов шаров. На внутреннем шаре заряд q создаёт потенциал kq/r_2. Заряд внешнего шара Q создаёт внутри него постоянный потенциал kQ/r_1. Как этот заряд распределился между внутренней и внешней поверхностями сферы, не важно: сфера тонкостенная, обе поверхности лежат на радиусе r_1. Поэтому

$$\varphi_{\text{вн}} = \frac{kq}{r_2} + \frac{kQ}{r_1}.$$

2. Условие после замыкания. Ток через резистор идёт, пока между внутренним шаром и Землёй есть разность потенциалов. Установившийся режим — ток прекратился, поэтому $\varphi_{\text{вн}} = 0$:

$$\frac{kq}{r_2} + \frac{kQ}{r_1} = 0 \;\Rightarrow\; q = -Q\frac{r_2}{r_1}.$$

Знак «минус»: положительный заряд внешнего шара притягивает из Земли отрицательный заряд. Проверка: при $r_2 \to r_1$ получаем $q \to -Q$ (внутренний шар почти полностью компенсирует внешний), при $r_2 \to 0$ заряд $q \to 0$.



до замыкания

после замыкания

Заряды и поле (для $r_2 = r_1/2$). Слева: заряд Q на внешней поверхности внешней сферы, поля внутри нет. Толщина стенок сфер на рисунке условно увеличена. Справа: на внутреннем шаре $q = -Q/2$, на внутренней поверхности внешней сферы $+Q/2$, на её внешней поверхности $+Q/2$; линии поля идут от плюсов к минусам.

Пункт 2.

3. Поле до замыкания. По теореме Гаусса поле внутри заряженной сферы равно нулю, а вне — поле точечного заряда Q: $E = kQ/x^2$ при $x > r_1$. Внутренний шар не заряжен и ничего не меняет. Поэтому энергия поля вне шаров — вся энергия системы.

4. Энергия. Поле вне сферы то же, что у уединённого проводящего шара радиуса r_1 с зарядом Q, и его энергия — энергия конденсатора, вторая обкладка которого — бесконечность, ёмкость $C_2 = 4\pi\varepsilon_0 r_1$:

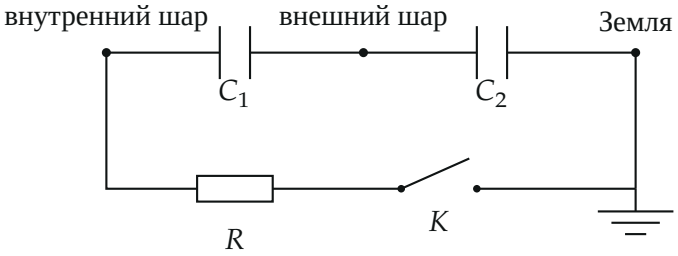
$$W_0 = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1}.$$

Проверка вторым способом — по плотности энергии поля $\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ в шаровом слое объёма $4\pi x^2 dx$:

$$W_0 = \int\limits_{r_1}^{\infty} \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\right)^2 4\pi x^2\,dx = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int\limits_{r_1}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1}.$$

Пункт 3.

5. Что считать системой. Система — два шара и поле вокруг них; заряд, ушедший в Землю, оказался при нулевом потенциале и энергии поля системы не уносит. Тогда, по закону сохранения энергии, убыль энергии поля равна выделенной теплоте: $W_{\text{нач}} = W_{\text{кон}} + W$. Для энергии поля нужны два «конденсатора»: зазор между шарами (ёмкость C_1) и пространство снаружи внешнего шара (ёмкость C_2).



Эквивалентная схема: между внутренним и внешним шаром — C_1, между внешним шаром и бесконечностью (Землёй) — C_2; внутренний шар соединён с Землёй через R и K.

6. Ёмкости. Ёмкость C_2 найдена выше. Обкладки C_1 — внутренний шар (заряд q) и внутренняя поверхность внешней сферы (заряд $-q$). Поле между ними создаёт заряд q, $E = kq/x^2$, поэтому напряжение между обкладками $U = \int\limits_{r_2}^{r_1} E\,dx = kq\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)$. Отсюда

$$C_1 = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_1 - r_2}.$$

7. Энергия в конце. Заряд внутреннего шара q, заряд внешней сферы Q; поле в зазоре создаёт заряд q (напряжение между шарами — от него),

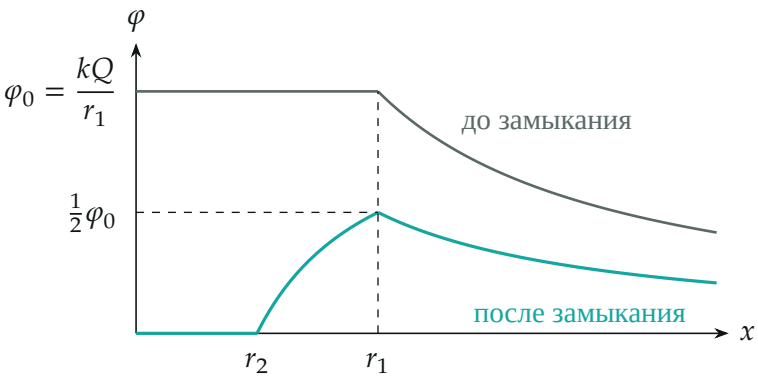
а вне — суммарный заряд $Q+q = Q\dfrac{r_1-r_2}{r_1}$. Подставляем q из пункта 1:

$$W_{\text{кон}} = \frac{q^2}{2C_1} + \frac{(Q+q)^2}{2C_2} = \frac{Q^2 r_2(r_1-r_2)}{8\pi\varepsilon_0 r_1^3} + \frac{Q^2(r_1-r_2)^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1^3}$$
$$= \frac{Q^2(r_1-r_2)}{8\pi\varepsilon_0 r_1^2}.$$

В начале энергия есть только снаружи: $W_{\text{нач}} = W_0$. Закон сохранения энергии:

$$W = W_0 - W_{\text{кон}} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1}\left(1 - \frac{r_1-r_2}{r_1}\right) = \frac{Q^2 r_2}{8\pi\varepsilon_0 r_1^2}.$$

Теплота положительна: резистор нагрелся за счёт энергии поля.



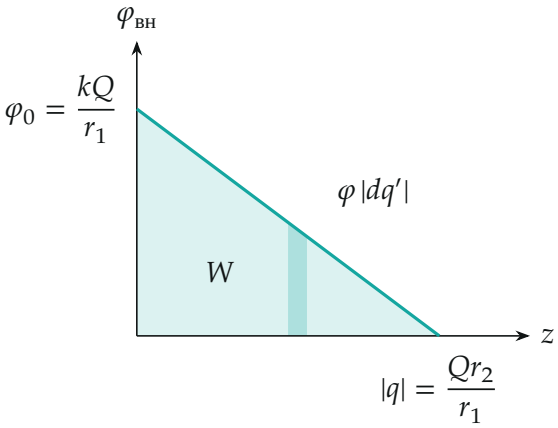
Потенциал $\varphi(x)$ на расстоянии x от центра для $r_2 = r_1/2$. Серая линия — до замыкания: внутри внешней сферы потенциал постоянен и равен φ_0. Бирюзовая — после: внутренний шар на нуле, потенциал растёт в зазоре и убывает снаружи.

8. Второй способ — через работу переноса заряда. Пусть на внутреннем шаре уже заряд q' (от 0 до q). Его потенциал $\varphi(q') = k\left(\dfrac{q'}{r_2} + \dfrac{Q}{r_1}\right)$ по пункту 1. Малый заряд $|dq'|$ уходит с шара в Землю, где потенциал нулевой, и энерговыделение в резисторе равно $\varphi\,|dq'|$

(заряд падает с потенциала φ до нуля). Полная теплота — площадь под графиком потенциала внутреннего шара от заряда, ушедшего в Землю: это треугольник с основанием $|q|$ и высотой $\varphi_0 = kQ/r_1$:

$$W = \frac{1}{2}\,|q|\,\varphi_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Qr_2}{r_1}\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \frac{Q^2 r_2}{8\pi\varepsilon_0 r_1^2}.$$

Ответ совпал с найденным через энергию поля.



Потенциал внутреннего шара в зависимости от заряда $z = -q'$, ушедшего в Землю. Узкая полоска — теплота, выделившаяся при уходе малого заряда; вся закрашенная площадь — полная теплота W.

Проверка. Размерности: $Q^2/(\varepsilon_0 r)$ — энергия. Пределы: при $r_2 \to 0$ получаем $q \to 0$ и $W \to 0$ (внутренний шар исчез, нечему стекать); при $r_2 \to r_1$ получаем $q \to -Q$, $W \to W_0$: вся энергия поля превращается в теплоту, потому что поле снаружи исчезает ($Q + q \to 0$). Численно для $Q = 3$ нКл, $r_1 = 30$ см, $r_2 = 12$ см оба способа дают $W = 5{,}39\cdot10^{-8}$ Дж. Смысл: доля r_2/r_1 начальной энергии поля уходит в тепло.

Ответ. 1) $q = -Q\,\dfrac{r_2}{r_1}$; 2) $W_0 = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1}$; 3) $W = \dfrac{Q^2 r_2}{8\pi\varepsilon_0 r_1^2}$.