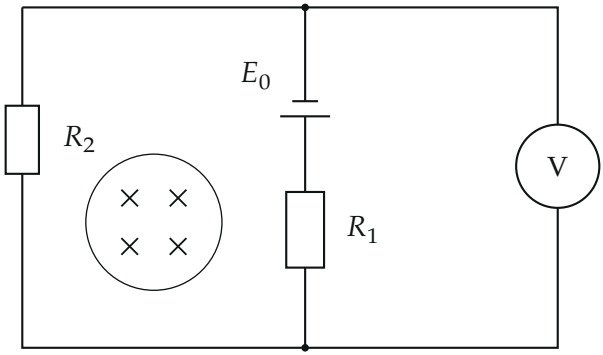
Вольтметр в контуре с меняющимся магнитным полем

Задача 4. [Физтех 2021/22, 11 класс, задача 4] В проволочную конструкцию впаяны резисторы с сопротивлениями $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, идеальный источник с ЭДС E_0, вольтметр с сопротивлением $R_V = 3R$ (см. рис.). Сопротивление проводов конструкции пренебрежимо мало. Однородное магнитное поле сосредоточено практически в узкой области — магнитном сердечнике с площадью поперечного сечения S.

1. Найти показание V_1 вольтметра, если индукция магнитного поля остаётся постоянной.
2. Найти показание V_2 вольтметра, если индукция магнитного поля возрастает с постоянной скоростью $\Delta B/\Delta t = k > 0$.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача по схеме «ЭДС индукции, затем цепь». Магнитное поле есть только в сердечнике, внутри левого контура, образованного резистором R_2 и средней ветвью. Когда B растёт, в этом контуре возникает ЭДС индукции; правый контур (вольтметр и средняя ветвь) сердечника не охватывает, и в нём ЭДС нет. Вольтметр неидеальный: через него идёт ток, а показание — напряжение $I_V R_V$. В пункте 1 поле постоянно, ЭДС индукции нет, и это обычная цепь постоянного тока. В пункте 2 добавляем ЭДС индукции в левый контур и решаем цепь правилами Кирхгофа. Проверяем принципом суперпозиции.

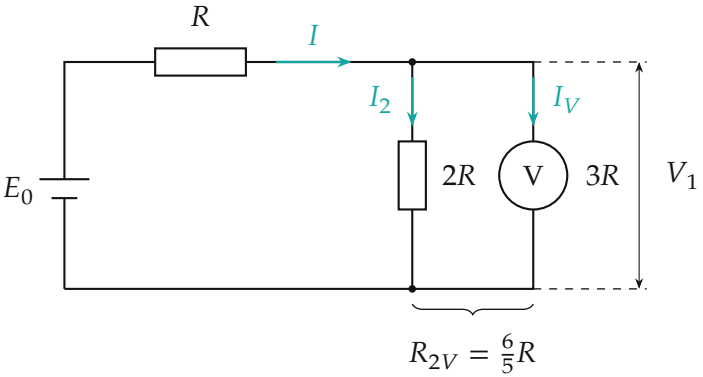
Обозначения. I — ток через вольтметр, I_1 — через R_1, I_2 — через R_2; верхний и нижний узлы — те, где сходятся три ветви.

Пункт 1.

1. Эквивалентная схема. Резистор R_2 и вольтметр присоединены к одним и тем же двум узлам, значит, соединены параллельно; их общее сопротивление

$$R_{2V} = \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V} = \frac{2R \cdot 3R}{2R + 3R} = \frac{6}{5}R.$$

Источник, R_1 и этот участок соединены последовательно.



Цепь пункта 1 в удобном виде: ток I от источника идёт через R_1 и делится между R_2 и вольтметром; показание V_1 — напряжение на их параллельном соединении.

2. Ток и показание. Источник идеальный, поэтому ток во всей цепи

$$I_{\text{общ}} = \frac{E_0}{R_1 + R_{2V}} = \frac{E_0}{R + 6R/5} = \frac{5E_0}{11R}.$$

Вольтметр показывает напряжение на параллельном участке:

$$V_1 = I_{\text{общ}} R_{2V} = \frac{5E_0}{11R} \cdot \frac{6R}{5} = \frac{6}{11}E_0.$$

Проверка через токи ветвей: $I_V = V_1/R_V = 2E_0/(11R)$, $I_2 = V_1/R_2 = 3E_0/(11R)$, сумма $5E_0/(11R)$ равна общему току. Обратите внимание:

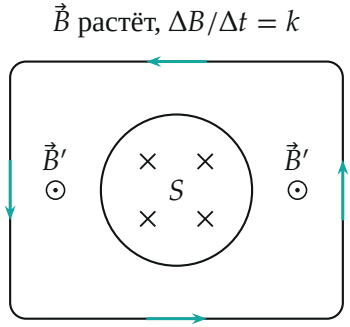
показание вольтметра меньше E_0 и не равно ни напряжению на R_2 отдельно, ни ЭДС: вольтметр конечного сопротивления потребляет ток, и часть напряжения падает на R_1.

Пункт 2.

3. ЭДС индукции. Магнитный поток через левый контур $\Phi = BS$: поле однородно и есть только в сердечнике, поэтому поток не зависит от формы контура. По закону электромагнитной индукции, модуль ЭДС

$$|\mathcal{E}| = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = S\,\frac{\Delta B}{\Delta t} = kS.$$

Направление находим по правилу Ленца: поток растёт, а его поле направлено от нас (крестики на рисунке), поэтому индукционный ток создаёт поле «на нас», то есть идёт против часовой стрелки.



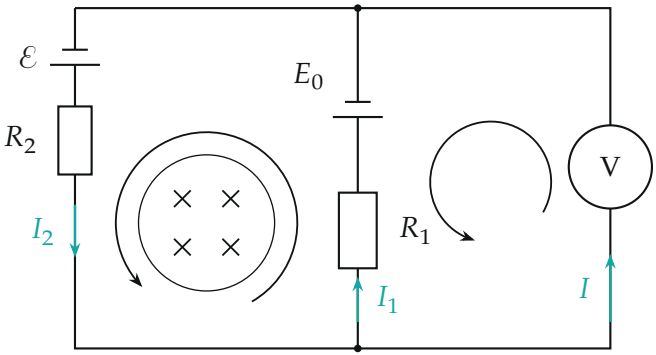
$|\mathcal{E}| = kS$, ток против часовой стрелки

Сердечник с полем $\vec{B}$ (от нас, крестики) и охватывающий его контур. Индукционный ток идёт против часовой стрелки, его поле $\vec{B}'$ внутри контура направлено на нас (точки) и противодействует росту $\vec{B}$.

4. Куда поместить ЭДС. ЭДС индукции действует в левом контуре и в правый не входит. Из ветви с источником E_0 она не может: иначе она вошла бы и в правый контур, где потока нет. Поэтому изобразим её источником $\mathcal{E} = kS$ в ветви с R_2, так, чтобы он гнал ток против часовой стрелки: в R_2 вниз и вверх по средней ветви.

5. Правила Кирхгофа. Выберем направления токов: I_1 вверх через R_1, I вверх через вольтметр, I_2 вниз через R_2 (рисунок ниже). Источник E_0 гонит ток вниз по средней ветви. Знак тока подскажет решение. Для верхнего узла (первое правило) и для обоих контуров, обходимых против часовой стрелки (второе правило):

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 + I, && \text{(узел)} \\ \mathcal{E} - E_0 &= I_2 R_2 + I_1 R_1, && \text{(левый контур: ЭДС } \mathcal{E} \text{ по обходу, } E_0 \text{ против)} \\ E_0 &= -I_1 R_1 + I R_V. && \text{(правый контур: } E_0 \text{ по обходу, } I_1 \text{ против)} \end{aligned}$$



Расчётная схема: ЭДС $\mathcal{E} = kS$ введена в ветвь с R_2, указаны выбранные направления токов; круговые стрелки — обходы левого и правого контуров.

6. Решение. Подставим $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_V = 3R$. Из третьего уравнения $RI_1 = 3RI - E_0$. Второе с учётом первого даёт

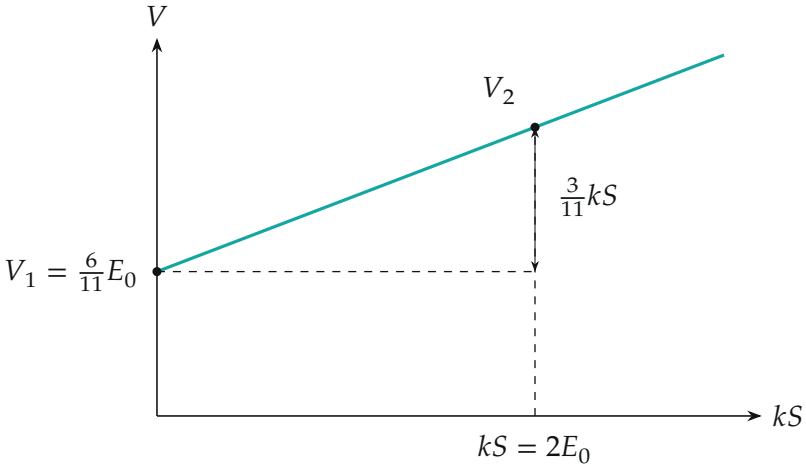
$$kS - E_0 = 2R(I_1 + I) + RI_1 = 3RI_1 + 2RI = 9RI - 3E_0 + 2RI,$$

откуда $11RI = kS + 2E_0$:

$$I = \frac{kS + 2E_0}{11R} > 0, \qquad V_2 = IR_V = \frac{3}{11}(2E_0 + kS).$$

Знак «плюс»: ток через вольтметр действительно идёт вверх, как выбрано, и в пункте 1 тоже вверх (для $k = 0$ получаем $V_1 = \frac{6}{11}E_0$, как выше).

7. Второй способ — суперпозиция. Цепь линейна, поэтому показание — сумма вкладов каждого источника. Вклад E_0 при $\mathcal{E} = 0$ найден в пункте 1: $\frac{6}{11}E_0$. Теперь оставим только $\mathcal{E}$, а идеальный E_0 заменим проводом. Тогда резисторы R_1 и R_V оказываются параллельными: $\dfrac{R \cdot 3R}{R + 3R} = \dfrac{3}{4}R$, и через источник $\mathcal{E}$ идёт ток $\dfrac{\mathcal{E}}{2R + 3R/4} = \dfrac{4kS}{11R}$. Напряжение на вольтметре $\dfrac{4kS}{11R} \cdot \dfrac{3}{4}R = \dfrac{3}{11}kS$; направление то же, что от E_0 (оба источника гонят ток через вольтметр вверх). Сумма $\frac{6}{11}E_0 + \frac{3}{11}kS$ совпала с V_2.



Показание вольтметра V_2 растёт с k линейно: к $V_1 = \frac{6}{11}E_0$ добавляется $\frac{3}{11}kS$. Для примера отмечено $kS = 2E_0$.

Проверка. Размерность: kS — (Тл/с)·м^2, это вольт, как и E_0. Пределы: $k \to 0$ даёт $V_2 \to V_1 = \frac{6}{11}E_0$; $E_0 \to 0$ даёт $\frac{3}{11}kS$ — доля ЭДС индукции, которая достаётся вольтметру в делителе R_2 и $R_1 \parallel R_V$. Два способа дали один ответ. Смысл: оба источника гонят ток через вольтметр в одну сторону, поэтому показание выше, чем без индукции.

Ответ. 1) $V_1 = \dfrac{6}{11}E_0$; 2) $V_2 = \dfrac{3}{11}(2E_0 + kS)$.