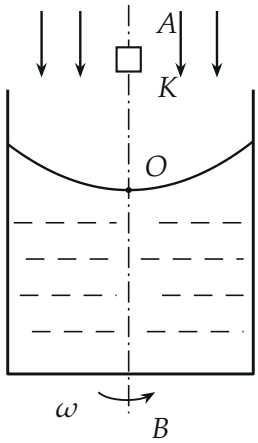
Вращающаяся жидкость как зеркало

Задача 5. [Физтех 2021/22, 11 класс, задача 5] Цилиндрический сосуд с жидкостью вращается с угловой скоростью $\omega = \dfrac{10}{3}$ с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси AB, совпадающей с осью симметрии сосуда (см. рис.). Наблюдатель, находясь вблизи экватора Земли, рассматривает в полдень изображение Солнца с помощью миниатюрной камеры K, расположенной на оси вращения.

1. Найти радиус кривизны свободной поверхности жидкости в её нижней точке O.
2. На каком расстоянии от точки O будет наблюдаться изображение Солнца, полученное в отражённых от свободной поверхности жидкости лучах?

Принять $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Жидкость вращается как целое, и её свободная поверхность не плоская, а изогнута: в каждой точке она перпендикулярна «эффективной силе тяжести», то есть результирующей силы тяжести и силы, которая удерживает элемент на окружности. Вблизи нижней точки O поверхность совпадает с окружностью некоторого радиуса R, а такая вогнутая поверхность — сферическое зеркало. Вблизи

экватора в полдень Солнце стоит в зените, и его лучи вертикальны, то есть параллельны оси вращения. Изображение бесконечно удалённого источника лежит в фокусе зеркала, на расстоянии $R/2$ от него. Это задача на динамику вращения (пункт 1) и на сферическое зеркало (пункт 2).

Обозначения. x — расстояние малого элемента жидкости от оси, y — его высота над точкой O, α — угол между нормалью к поверхности и вертикалью (он же угол наклона поверхности к горизонту), R — радиус кривизны поверхности в точке O, C — центр этой окружности.

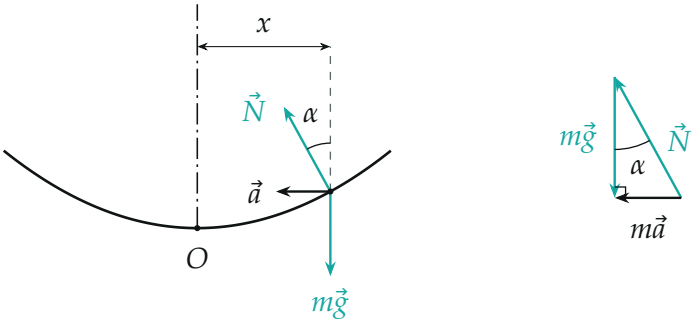
Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для малого элемента. Выделим на поверхности малый элемент жидкости массой m на расстоянии x от оси. Он вместе со всей жидкостью движется по окружности радиуса x с угловой скоростью ω, поэтому его ускорение направлено горизонтально к оси и равно $a = \omega^2 x$. На элемент действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила давления остальной жидкости $\vec{N}$; жидкость не имеет касательных сил, поэтому $\vec{N}$ перпендикулярна поверхности. Запишем второй закон Ньютона векторно и в проекциях на вертикаль и на горизонталь (к оси):

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}; \qquad N\cos\alpha = mg, \qquad N\sin\alpha = m\omega^2 x.$$

Давление N нам неизвестно, поэтому разделим второе уравнение на первое:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

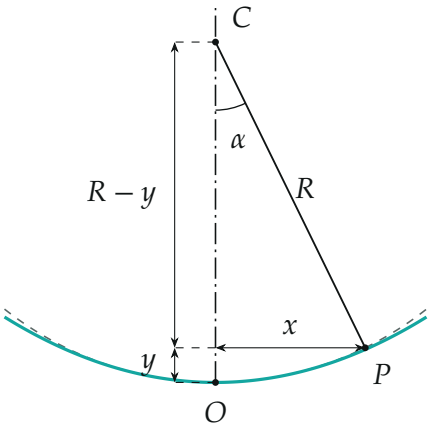


Слева: малый элемент на поверхности (форма поверхности — парабола),

силы на него и ускорение к оси; справа те же векторы сложены в треугольник $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$. *Угол* α *на рисунке увеличен.*

2. Радиус кривизны. Окружность радиуса R с центром C на оси, проходящая через O, при малых x и α почти совпадает с поверхностью. Нормаль к окружности идёт по радиусу, поэтому угол между радиусом CP и вертикалью — тот же α. Из прямоугольного треугольника с катетами x и $R - y$ при $y \ll R$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{R-y} \approx \frac{x}{R}.$$



Окружность кривизны (серый пунктир) и поверхность жидкости (бирюзовая линия) вблизи точки O почти совпадают; α *— угол при центре C.*

Приравниваем два выражения для $\operatorname{tg}\alpha$: $\dfrac{\omega^2 x}{g} = \dfrac{x}{R}$, и x сокращается:

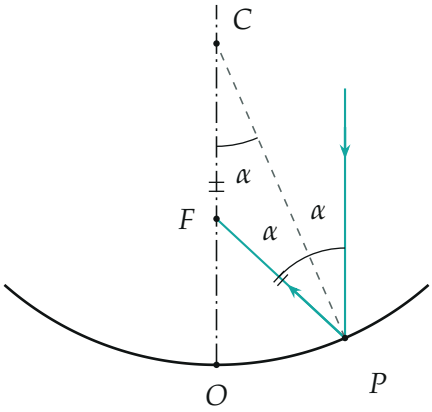
$$R = \frac{g}{\omega^2} = \frac{10}{(10/3)^2}\ \text{м} = 0{,}9\ \text{м} = 90\ \text{см}.$$

Тот же результат даёт второй способ: из $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\omega^2 x}{g}$ получаем параболу $y = \dfrac{\omega^2 x^2}{2g}$, а окружность радиуса R вблизи O имеет вид $y \approx \dfrac{x^2}{2R}$; совпадение коэффициентов даёт то же $R = g/\omega^2$.

Пункт 2.

3. Лучи параллельны оси. В полдень вблизи экватора Солнце в зените, его лучи вертикальны и параллельны оси вращения. Само Солнце очень далеко, и его изображение получается там, где параллельный оси пучок после отражения собирается в точку.

4. Ход луча в сферическом зеркале. Вблизи точки O поверхность — вогнутое сферическое зеркало с центром C и радиусом R. Вертикальный луч падает на расстоянии x от оси в точку P. Угол между лучом и нормалью PC равен α, по закону отражения отражённый луч идёт по другую сторону нормали под тем же углом α и пересекает ось в точке F. Угол PCF при центре тоже равен α (он равен углу между вертикальной осью и радиусом, а луч вертикален). Значит, в треугольнике PCF два угла равны, треугольник равнобедренный и $CF = PF$.



Сферическое зеркало радиуса R: падающий луч (вертикальный), нормаль PC (серый пунктир) и отражённый луч PF. Две пары равных углов α делают треугольник PCF равнобедренным; метки на сторонах PF и CF — равные стороны. Угол α на рисунке увеличен.

5. Расстояние до изображения. Для лучей около оси угол α мал, точка P почти совпадает с O, поэтому $PF \approx OF$. Точка F лежит на отрезке $CO = R$, значит, $CF + FO = R$, а с учётом $CF = PF \approx FO$ получаем $2\,FO \approx R$:

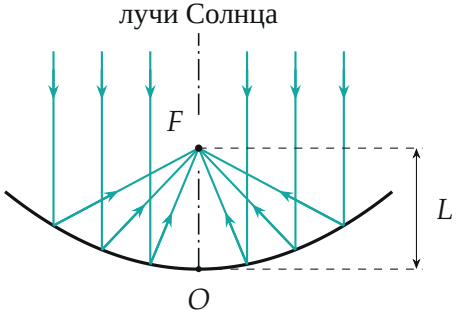
$$L = OF = \frac{R}{2} = \frac{g}{2\omega^2} = 45 \text{ см}.$$

Это фокус сферического зеркала, $f = R/2$; параллельный пучок (Солнце бесконечно далеко) собирается в него.

6. Проверка точным расчётом. Для параболы $y = \omega^2 x^2/(2g)$ не нужно требовать малости x. Обозначим $u = \operatorname{tg}\alpha = \omega^2 x/g$. Отражённый луч идёт под углом 2α к вертикали и пересекает ось на высоте $y + x/\operatorname{tg} 2\alpha$ над точкой O:

$$y + \frac{x}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{gu^2}{2\omega^2} + x \cdot \frac{1-u^2}{2u} = \frac{gu^2}{2\omega^2} + \frac{g\,(1-u^2)}{2\omega^2} = \frac{g}{2\omega^2} = \frac{R}{2}.$$

Результат не зависит от x: парабола собирает в одну точку все лучи, параллельные оси, и точка эта на расстоянии $R/2 = 45$ см от O.



Вращающаяся жидкость как зеркало: вертикальные лучи после отражения от параболической поверхности (вычислены по $\operatorname{tg}\alpha = \omega^2 x/g$) идут в одну точку F на расстоянии $L = R/2$ от O.

Проверка. Размерности: g/ω^2 — метры. Предел: при $\omega \to 0$ (жидкость покоится) $R \to \infty$ — поверхность плоская, и фокус уходит на бесконечность, как у плоского зеркала; чем быстрее вращение, тем меньше R и ближе изображение. Два способа для радиуса (силы и параболы) и два для расстояния (равнобедренный треугольник и точный расчёт) дали одно и то же. Смысл: зеркало получается само, потому что поверхность подстраивается под силу, а фокусное расстояние зависит только от g и ω.

Ответ. 1) $R = \dfrac{g}{\omega^2} = 90$ см; 2) $L = \dfrac{R}{2} = \dfrac{g}{2\omega^2} = 45$ см.