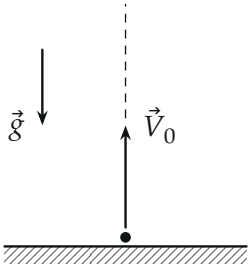
Камень брошен вертикально вверх

Задача 1. [Физтех 2021/22, 9 класс, варианты 9-01–9-02, задача 1] Школьник бросает камень вертикально вверх с начальной скоростью $V_0 = 12$ м/с.

1. Через какое время t после старта скорость камня будет равна по величине $V_0/3$?
2. На какой высоте h, отсчитанной от точки старта, скорость камня будет равна по величине $V_0/3$?

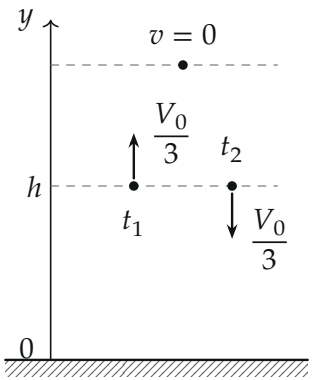
Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.



Поясняющий рисунок: камень брошен вертикально вверх со скоростью $\vec{V}_0$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Камень движется только под действием силы тяжести, с постоянным ускорением $\vec{g}$, направленным вниз: это равноускоренное движение по прямой. Скорость по модулю сначала убывает до нуля в верхней точке, потом растёт. Поэтому модуль $V_0/3$ камень имеет *дважды*: на подъёме и на спуске — и на одной и той же высоте.

Обозначения. Ось y — вертикально вверх, начало — в точке броска, $t = 0$ — момент броска. v_y — проекция скорости на ось y, t_1 и t_2 — моменты, когда $|v_y| = V_0/3$ на подъёме и на спуске.



Ось y вверх. На высоте h камень бывает дважды: в момент t_1 со скоростью $V_0/3$ вверх и в момент t_2 — со скоростью $V_0/3$ вниз (подъём и спуск разнесены по горизонтали для наглядности).

Пункт 1.

1. Закон изменения скорости при равноускоренном движении. В векторном виде $\vec{v} = \vec{V}_0 + \vec{g}\,t$. В проекции на ось y: $V_{0y} = V_0$, $g_y = -g$, поэтому

$$v_y = V_0 - gt.$$

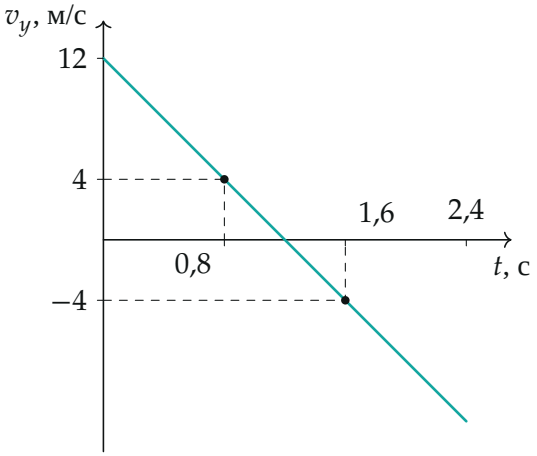
2. Подъём. На подъёме скорость направлена вверх, $v_y = +V_0/3$:

$$\frac{V_0}{3} = V_0 - gt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{2V_0}{3g} = \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 10} = 0{,}8 \text{ с}.$$

3. Спуск. На спуске скорость направлена вниз, $v_y = -V_0/3$ (знак минус — скорость против оси):

$$-\frac{V_0}{3} = V_0 - gt_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{4V_0}{3g} = \frac{4 \cdot 12}{3 \cdot 10} = 1{,}6 \text{ с}.$$

Оба момента подходят: камень летит, пока не вернулся в точку броска, то есть до $2V_0/g = 2{,}4$ с, и $t_1, t_2 < 2{,}4$ с.



Проекция скорости $v_y = V_0 - gt$ — прямая. Модуль 4 м/с $= V_0/3$ достигается в $t_1 = 0{,}8$ с ($v_y = +4$) и в $t_2 = 1{,}6$ с ($v_y = -4$).

Пункт 2.

4. Закон сохранения механической энергии от броска до момента t_1. Работает только сила тяжести, поэтому

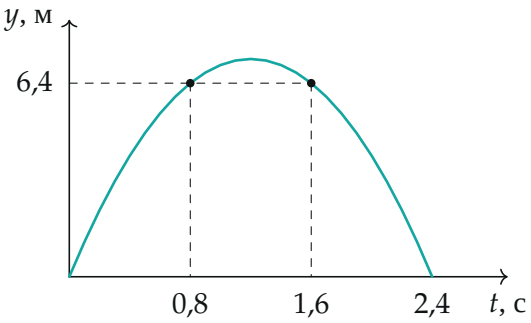
$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{V_0}{3}\right)^2 + mgh,$$

откуда

$$h = \frac{V_0^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{4V_0^2}{9g} = \frac{4 \cdot 144}{9 \cdot 10} = 6{,}4 \text{ м}.$$

Масса сократилась, а в уравнение вошёл только модуль скорости. Значит, в момент t_2 камень на той же высоте 6,4 м: ответ на второй вопрос один.

5. Второй способ — закон движения. $y = V_0 t - gt^2/2$. При $t_1 = 0{,}8$ с: $y = 12 \cdot 0{,}8 - 5 \cdot 0{,}64 = 6{,}4$ м; при $t_2 = 1{,}6$ с: $y = 19{,}2 - 12{,}8 = 6{,}4$ м. Совпало.



Высота камня $y(t)$ по точкам закона движения. Моменты 0,8 с и 1,6 с симметричны относительно вершины $t = 1{,}2$ с, высота в них одна — 6,4 м.

Обратите внимание. «Скорость по величине» — это модуль. Уравнение $v_y = V_0/3$ даёт только подъём; второй ответ $t_2 = 1{,}6$ с потерять легко.

Проверка. Размерности: V_0/g — с, V_0^2/g — м. Симметрия: $t_1 + t_2 = 2{,}4$ с $= 2\cdot\dfrac{V_0}{g}$, моменты равноудалены от вершины $V_0/g = 1{,}2$ с — так и должно быть для движения с постоянным ускорением. Смысл: скорость упала втрое, значит, кинетическая энергия — в девять раз, и $8/9$ её ушло в потенциальную: $h = \frac{8}{9}\cdot\frac{V_0^2}{2g}$.

Ответ. 1) $t_1 = \dfrac{2V_0}{3g} = 0{,}8$ с (на подъёме) и $t_2 = \dfrac{4V_0}{3g} = 1{,}6$ с (на спуске); 2) $h = \dfrac{4V_0^2}{9g} = 6{,}4$ м.