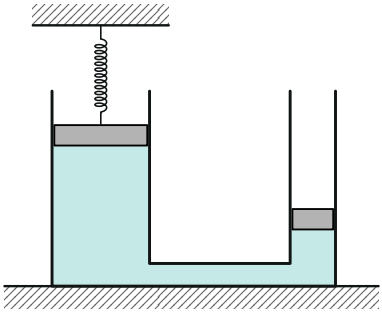
Сообщающиеся сосуды с поршнями и пружиной

Задача 2. [Физтех 2021/22, 9 класс, варианты 9-01–9-02, задача 2] На горизонтальной поверхности расположены два цилиндрических сообщающихся сосуда (см. рис.), в которых налита жидкость плотности ρ. На свободных поверхностях жидкости находятся лёгкие поршни. Зазоров между стенками сосудов и поршнями нет. Левый поршень соединён пружиной жёсткости k с верхней опорой. Разность уровней жидкости в сосудах равна h. Площадь сечения левого поршня S, правого $S/2$. Трение поршней о стенки сосудов пренебрежимо мало. Ускорение свободного падения g.

1. Найдите деформацию x пружины.
2. Найдите массу m груза, который следует положить на правый поршень, чтобы пружина стала недеформированной.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Жидкость покоится, значит, давление в ней на одном горизонтальном уровне одинаково в обоих сосудах (закон сообщающихся сосудов), а с глубиной растёт на $\rho g \cdot$глубина. Под правым лёгким поршнем давление атмосферное, а левый поршень стоит выше — значит, под ним давление *меньше* атмосферного, и атмосфера давит на него сильнее, чем жидкость. Удержать его может только пружина, которая тянет вверх: она растянута. Это задача на гидростатику и равновесие поршня. Во втором пункте жидкость перетекает, но её объём сохраняется.

Обозначения. P_0 — атмосферное давление, P — давление жидкости под левым поршнем, x — удлинение пружины. Ось y — вертикально

вверх. Во втором пункте x' — насколько опустился правый поршень, H' — новая разность уровней.

Пункт 1.

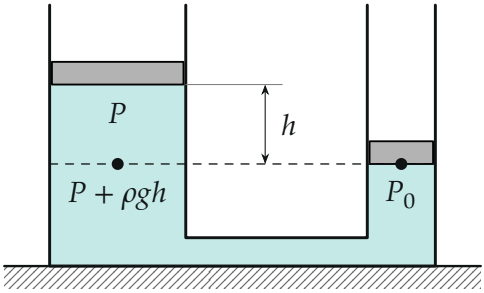
1. Давление на уровне правого поршня. Правый поршень лёгкий, поэтому давление жидкости под ним равно атмосферному P_0. В левом сосуде на том же уровне — на глубине h под левым поршнем — давление $P + \rho gh$. Жидкость сообщается и покоится:

$$P + \rho gh = P_0 \quad \Rightarrow \quad P = P_0 - \rho gh.$$

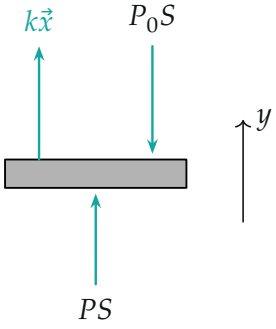
2. Условие равновесия левого (лёгкого) поршня в проекции на ось y. Вверх — сила давления жидкости PS и сила упругости пружины kx, вниз — сила давления атмосферы P_0S:

$$kx + PS - P_0S = 0 \quad \Rightarrow \quad kx = (P_0 - P)S = \rho ghS \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\rho ghS}{k}.$$

Знак: $x > 0$ — пружина растянута.



Пункт 1. На штриховом уровне давление в обоих сосудах одинаково: $P + \rho gh = P_0$.



Силы на левый лёгкий поршень: пружина kx и жидкость PS вверх, атмосфера P_0S вниз; $PS < P_0S$, поэтому пружина тянет вверх.

Пункт 2.

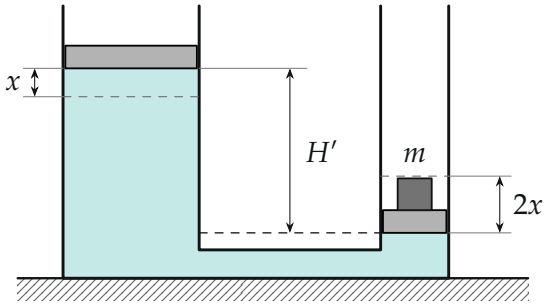
3. Где окажутся поршни. Пружина станет недеформированной, когда левый поршень поднимется на x (она была растянута на x, верхняя опора неподвижна). Тогда давление под ним снова равно P_0: на лёгкий поршень сверху давит атмосфера, а пружина сил не создаёт.

4. Закон сохранения объёма жидкости. Сколько жидкости ушло из правого сосуда, столько пришло в левый:

$$Sx = \frac{S}{2}x' \quad \Rightarrow \quad x' = 2x.$$

Новая разность уровней: левый поднялся на x, правый опустился на $2x$,

$$H' = h + x + 2x = h + 3x.$$



Пункт 2. Штрихами — прежние уровни. Левый поршень поднялся на x, правый опустился на $2x$; разность уровней стала $H' = h + 3x$.

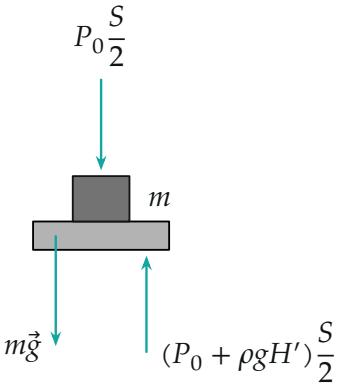
5. Давление на уровне правого поршня. В левом сосуде на этом уровне (на глубине H') давление $P_0 + \rho g H'$; столько же под правым поршнем.

6. Условие равновесия правого поршня с грузом в проекции на ось y. Вверх — сила давления жидкости $(P_0 + \rho g H')\frac{S}{2}$, вниз — атмосфера $P_0\frac{S}{2}$ и вес груза mg (груз покоится на поршне и давит на него с силой mg):

$$(P_0 + \rho g H')\frac{S}{2} - P_0\frac{S}{2} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\rho S}{2}H' = \frac{\rho S}{2}(h + 3x).$$

Подставим x из пункта 1:

$$m = \frac{\rho S}{2}\left(h + \frac{3\rho g h S}{k}\right) = \frac{\rho h S}{2}\left(1 + \frac{3\rho g S}{k}\right).$$



Силы на правый поршень вместе с грузом: атмосфера и вес груза вниз, давление жидкости вверх.

Обратите внимание. Нельзя считать, что разность уровней осталась h: жидкость перетекает, и из-за разных сечений правый уровень сдвигается вдвое сильнее левого — отсюда $3x$, а не x и не $2x$.

Проверка. Размерности: $\frac{\rho g h S}{k} = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^2}{\text{Н/м}} = \text{м}$; $\rho h S$ — кг, $\frac{\rho g S}{k}$ — безразмерно. Предел: очень жёсткая пружина, $k \to \infty$ — поршни почти не сдвигаются, $x \to 0$ и $m \to \frac{\rho h S}{2}$: груз просто заменяет столб жидкости высотой h над правым поршнем. Смысл: груз должен уравновесить столб высоты H' на площади $S/2$, а сдвиг поршней этот столб удлиняет.

Ответ. 1) $x = \frac{\rho g h S}{k}$ (пружина растянута); 2) $m = \frac{\rho S}{2}(h + 3x) = \frac{\rho h S}{2}\left(1 + \frac{3\rho g S}{k}\right)$.