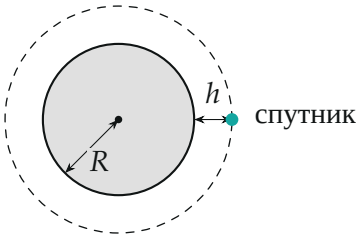
Спутник и плотность планеты

Задача 3. [Физтех 2021/22, 9 класс, варианты 9-01–9-02, задача 3] Спутник обращается по круговой орбите вокруг планеты. Высота орбиты $h = 0{,}5R$, здесь R — радиус планеты. Плотность планеты ρ. Гравитационная постоянная G. Объём шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

1. Найдите ускорение g свободного падения на расстоянии $2R$ от центра планеты.
2. Найдите период T обращения спутника.



Поясняющий рисунок: планета радиуса R и круговая орбита спутника на высоте h.

▲ **Решение. Что происходит.** Планета однородна, поэтому снаружи она притягивает как точечная масса M в центре (закон всемирного тяготения для шара). Ускорение свободного падения на расстоянии r от центра — это сила тяготения, делённая на массу пробного тела. Спутник на круговой орбите движется равномерно по окружности, и центростремительное ускорение ему сообщает только сила тяготения — задача на второй закон Ньютона для движения по окружности.

Обозначения. M — масса планеты, m — масса спутника (или пробного тела), $r = R + h$ — радиус орбиты, v — скорость спутника, ось n — от спутника к центру планеты.

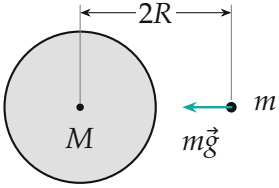
1. Масса планеты. Планета — однородный шар:

$$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

Пункт 1.

2. Закон всемирного тяготения для тела массы m на расстоянии $2R$ от центра. Сила тяготения — это и есть mg на этом расстоянии:

$$mg = G\frac{mM}{(2R)^2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{GM}{4R^2} = \frac{G}{4R^2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho = \frac{\pi}{3}G\rho R.$$



На расстоянии $2R$ от центра на тело m действует сила тяготения к центру планеты; по определению она равна $m\vec{g}$.

Пункт 2.

3. Второй закон Ньютона для спутника в проекции на ось n (к центру). На спутник действует только сила тяготения $\vec{F}$, направленная к центру; ускорение — центростремительное, $a_n = v^2/r$:

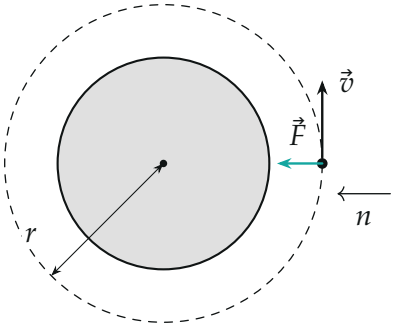
$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM}{r}.$$

4. Период равномерного движения по окружности. За период спутник проходит длину орбиты: $v = \dfrac{2\pi r}{T}$. Подставим:

$$\frac{4\pi^2r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2r^3}{GM} = \frac{4\pi^2r^3}{G\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho} = \frac{3\pi}{G\rho}\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

5. Числа. $r = R + h = \frac{3}{2}R$, $(r/R)^3 = \frac{27}{8}$:

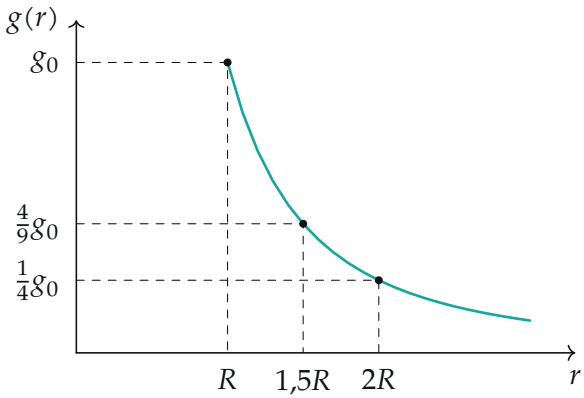
$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}\cdot\frac{27}{8}} = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2G\rho}}.$$



Спутник на орбите радиуса $r = R+h$: сила тяготения $\vec{F}$ к центру, скорость $\vec{v}$ по касательной; ось n — к центру.

Обратите внимание. В первом пункте спрашивают ускорение на расстоянии $2R$ *от центра*, а не на высоте $2R$: в закон тяготения входит расстояние до центра.

Проверка. Размерности: $[G\rho R] = \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\cdot\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\text{м} = \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$ — ускорение; $[G\rho] = \text{с}^{-2}$, значит, $1/\sqrt{G\rho}$ — время. Второй способ для периода: центростремительное ускорение спутника равно ускорению свободного падения на его орбите, $g(r) = g_0(R/r)^2$, где $g_0 = \frac{4}{3}\pi G\rho R$ — на поверхности; на $r = 2R$ это $g_0/4 = \frac{\pi}{3}G\rho R$ (совпало с пунктом 1), а $\frac{4\pi^2}{T^2}r = g_0\frac{R^2}{r^2}$ даёт то же T. Смысл: период определяется только плотностью планеты и отношением r/R — у любой планеты той же плотности спутник на высоте $R/2$ обращается за то же время.



Ускорение свободного падения снаружи планеты, $g = g_0 R^2/r^2$, по точкам. На орбите спутника ($1{,}5R$) оно равно $\frac{4}{9}g_0$, на расстоянии $2R$ — $\frac{1}{4}g_0 = \frac{\pi}{3}G\rho R$.

Ответ. 1) $g = \dfrac{\pi}{3}G\rho R$; 2) $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho}}\left(1 + \dfrac{h}{R}\right)^{3/2} = \dfrac{9}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2G\rho}}$.