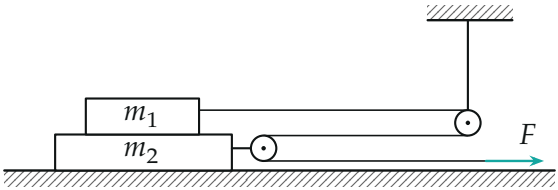
Бруски и система блоков с трением

Задача 4. [Физтех 2021/22, 9 класс, варианты 9-01–9-02, задача 4] На горизонтальном столе находятся бруски, соединённые нитью с системой блоков (см. рис.). Массы брусков $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$. Коэффициент трения скольжения нижнего бруска по столу и верхнего бруска по нижнему равен μ. Массы нити и блоков, а также трение в осях блоков пренебрежимо малы.

1. Найдите величину F_0 горизонтальной силы, которую следует приложить к свободному концу нити, чтобы нижний брусок скользил по столу, а сила трения, действующая на верхний брусок, была равна нулю.
2. Найдите величину F минимальной силы, при которой нижний брусок скользит по столу, а верхний брусок движется влево относительно нижнего бруска.



▲ **Решение. Что происходит.** Нить одна и невесома, блоки лёгкие и без трения, поэтому натяжение нити везде одно и равно приложенной силе. Верхний брусок нить тянет вправо один раз, а нижний — дважды: к нему прикреплён подвижный блок, который нить огибает. Значит, нижний брусок тянут сильнее, но он и тяжелее, и его тормозит стол. Это задача на второй закон Ньютона для связанных тел с трением: какое ускорение «хочет» каждый брусок и что из этого делает сила трения между ними.

Обозначения. T — натяжение нити ($T = F_0$ или $T = F$), a_1, a_2 — ускорения верхнего и нижнего брусков, ось x — горизонтально вправо, ось y — вверх. N_1 — сила нормальной реакции между брусками, N_2 — со стороны стола на нижний брусок, f — сила трения между брусками (её проекция на ось x для верхнего бруска).

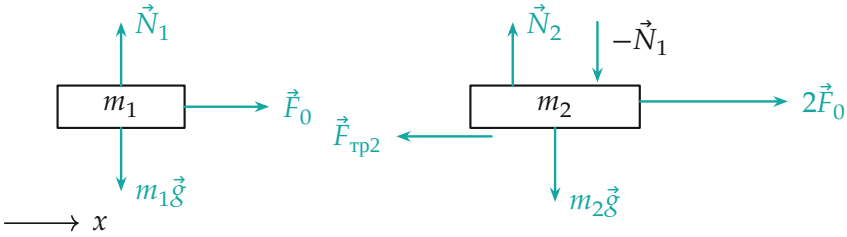
1. Силы нормальной реакции. Второй закон Ньютона в проекции на ось y (по вертикали ускорений нет). Для верхнего бруска $N_1 = m_1 g = 2mg$; для двух брусков вместе $N_2 = (m_1 + m_2)g = 5mg$. Нижний брусок скользит по столу вправо (нить тянет его вправо), поэтому трение стола на него — трение скольжения, влево:

$$F_{\text{тр}2} = \mu N_2 = 5\mu mg.$$

Пункт 1.

2. Второй закон Ньютона для каждого бруска в проекции на ось x. Трения между брусками нет ($f = 0$):

$$m_1 a_1 = F_0, \qquad m_2 a_2 = 2F_0 - \mu(m_1 + m_2)g.$$



Пункт 1. Силы на брусках по отдельности. Трения между брусками нет; на нижний брусок нить действует дважды ($2F_0$), стол тормозит его силой $F_{тр2} = \mu(m_1 + m_2)g$. Верхний брусок давит на нижний с силой $-\vec{N}_1$ (третий закон Ньютона).

3. Условие «трения нет». Без трения бруски всё равно должны ехать вместе — иначе между ними было бы скольжение и трение скольжения. Значит, $a_1 = a_2$:

$$\frac{F_0}{2m} = \frac{2F_0 - 5\mu mg}{3m} \quad \Rightarrow \quad 3F_0 = 4F_0 - 10\mu mg \quad \Rightarrow \quad F_0 = 10\mu mg.$$

В общем виде $F_0 = \mu g\, m_1 \dfrac{m_1 + m_2}{2m_1 - m_2}$. Нижний брусок при этом действительно скользит: $2F_0 = 20\mu mg > 5\mu mg$.

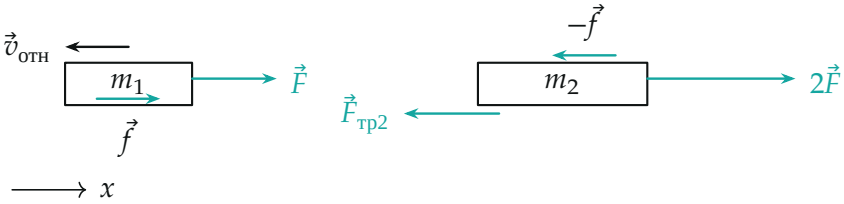
Пункт 2.

4. Направление трения между брусками. Верхний брусок едет влево относительно нижнего, значит, трение скольжения на него действует вправо (против относительной скорости), $f = +\mu N_1 = \mu m_1 g$; на нижний — по третьему закону Ньютона влево.

5. Второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$m_1 a_1 = F + \mu m_1 g, \qquad m_2 a_2 = 2F - \mu m_1 g - \mu(m_1 + m_2) g.$$

С числами: $a_1 = \dfrac{F}{2m} + \mu g$, $a_2 = \dfrac{2F - 7\mu mg}{3m}$.



Пункт 2, горизонтальные силы. Верхний брусок скользит влево относительно нижнего ($\vec{v}_{отн}$), трение $\vec{f}$ на него — вправо, на нижний $-\vec{f}$ — влево.

6. Условие «верхний едет влево относительно нижнего». Ускорение нижнего больше: $a_2 > a_1$.

$$\frac{2F - 7\mu mg}{3m} > \frac{F}{2m} + \mu g,$$

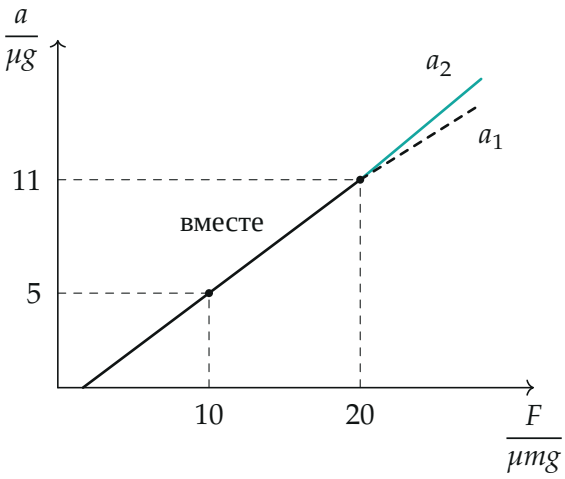
откуда

$$4F - 14\mu mg > 3F + 6\mu mg \quad \Rightarrow \quad F > 20\mu mg.$$

В общем виде $F > 2\mu g\, m_1 \dfrac{m_1 + m_2}{2m_1 - m_2} = 2F_0$. Минимальная (граничная) сила $F = 20\mu mg$.

7. Проверка вторым способом — графики ускорений. Пока бруски едут вместе, $a = \dfrac{3F - 5\mu mg}{5m}$, а трение покоя на верхний брусок $f = m_1 a - F = \dfrac{F - 10\mu mg}{5}$. Оно равно нулю при $F = 10\mu mg$ (пункт 1) и

достигает предела $\mu m_1 g = 2\mu mg$ при $F = 20\mu mg$ — дальше бруски разъезжаются, это и есть граница пункта 2.



Ускорения брусков по точкам уравнений движения. До $F = 20\mu mg$ бруски едут вместе (чёрная прямая), в точке $F = 10\mu mg$ трение между ними равно нулю; после $F = 20\mu mg$ нижний (бирюзовый, a_2) обгоняет верхний (пунктир, a_1).

Обратите внимание. На нижний брусок нить действует с силой $2F$, а не F: подвижный блок на нём нить огибает, и тянут обе её ветви. Сила трения стола — от веса *обоих* брусков, $\mu(m_1 + m_2)g$.

Проверка. Размерность: μmg — сила. Знак: при $2m_1 \le m_2$ формула для F_0 теряет смысл — нижний брусок с двойной силой не может догнать лёгкий верхний, и условие пункта 1 невыполнимо; у нас $2m_1 = 4m > 3m$ — выполнимо. Смысл: при F_0 «желаемые» ускорения брусков совпадают, трению нечего делать; вдвое большая сила — ровно та, при которой трению покоя уже не хватает удержать верхний брусок.

Ответ. 1) $F_0 = \mu g\, m_1 \dfrac{m_1 + m_2}{2m_1 - m_2} = 10\mu mg$; 2) $F = 2F_0 = 20\mu mg$.