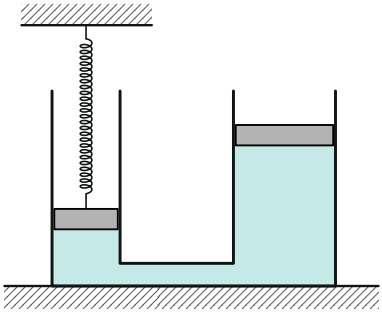
Сообщающиеся сосуды, груз на поршне

Задача 2. [Физтех 2021/22, 9 класс, варианты 9-03–9-04, задача 2] На горизонтальной поверхности расположены два цилиндрических сообщающихся сосуда (см. рис.), в которые налита жидкость плотности ρ. На свободных поверхностях жидкости находятся лёгкие поршни. Зазоров между стенками сосудов и поршнями нет. Левый поршень соединён пружиной жёсткости k с верхней опорой. Разность уровней жидкости в сосудах равна h. Площадь сечения левого поршня S, правого $1{,}5S$. Трение поршней о стенки сосудов пренебрежимо мало. Ускорение свободного падения g.

1. Найдите деформацию x пружины.
2. На правый поршень положили груз массой m. Найдите массу M груза, который следует положить на левый поршень, чтобы пружина стала недеформированной. Поршни при этом не достигают дна.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Жидкость покоится, значит, давление в ней на одном горизонтальном уровне одинаково в обоих сосудах (закон сообщающихся сосудов), а с глубиной растёт на $\rho g \cdot$глубина. Под правым лёгким поршнем давление атмосферное, а левый поршень стоит ниже — значит, под ним давление *больше* атмосферного, и жидкость давит на него снизу сильнее, чем атмосфера сверху. Удержать его может только пружина, которая давит вниз: она сжата. Это задача на гидростатику и равновесие поршня. Во втором пункте жидкость перетекает, но её объём сохраняется.

Обозначения. P_0 — атмосферное давление, P — давление жидкости под левым поршнем, x — сжатие пружины. Ось y — вертикально вверх. Во втором пункте x' — насколько поднялся правый поршень, H' — новая разность уровней.

Пункт 1.

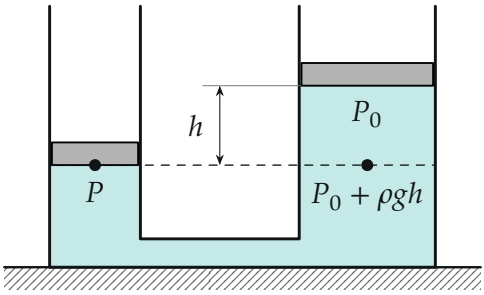
1. Давление на уровне левого поршня. Правый поршень лёгкий, поэтому давление жидкости под ним равно атмосферному P_0. В правом сосуде на уровне левого поршня — на глубине h под правым поршнем — давление $P_0 + \rho g h$. Жидкость сообщается и покоится:

$$P = P_0 + \rho g h.$$

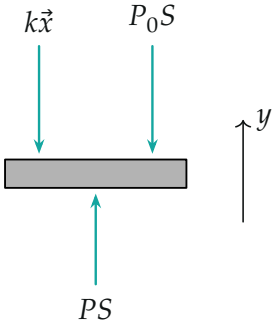
2. Условие равновесия левого (лёгкого) поршня в проекции на ось y. Вверх — сила давления жидкости PS, вниз — сила давления атмосферы $P_0 S$ и сила упругости сжатой пружины kx:

$$PS - P_0 S - kx = 0 \quad \Rightarrow \quad kx = (P - P_0)S = \rho g h S \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\rho g h S}{k}.$$

Знак: $x > 0$ — пружина сжата.



Пункт 1. На штриховом уровне (уровне левого поршня) давление в обоих сосудах одинаково: $P = P_0 + \rho g h$.



Силы на левый лёгкий поршень: пружина kx и атмосфера P_0S вниз, жидкость PS вверх; $PS > P_0S$, поэтому пружина давит вниз — она сжата.

Пункт 2.

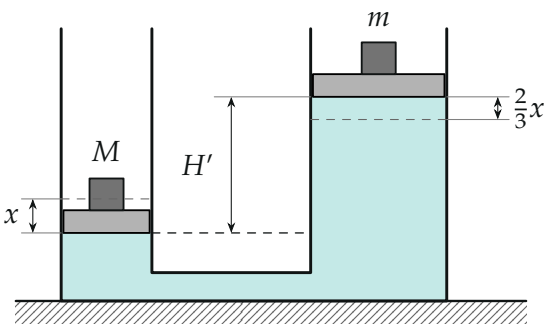
3. Где окажутся поршни. Пружина станет недеформированной, когда левый поршень опустится на x (она была сжата на x, верхняя опора неподвижна). Тогда пружина на поршень не действует, и давление под ним создают атмосфера и груз M: $P_0 + \dfrac{Mg}{S}$.

4. Закон сохранения объёма жидкости. Сколько жидкости ушло из левого сосуда, столько пришло в правый:

$$Sx = 1{,}5S\,x' \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{2}{3}\,x.$$

Новая разность уровней (правый по-прежнему выше): левый опустился на x, правый поднялся на $\frac{2}{3}x$,

$$H' = h + x + \frac{2}{3}\,x = h + \frac{5}{3}\,x.$$



Пункт 2. Штрихами — прежние уровни. Левый поршень опустился на x, правый поднялся на $\frac{2}{3}x$; разность уровней стала $H' = h + \frac{5}{3}x$.

5. Давления под поршнями. Под правым поршнем с грузом m давление $P_0 + \dfrac{mg}{1{,}5S}$ (поршень лёгкий, груз давит на него с силой mg). Левый поршень ниже правого на H', поэтому под ним давление больше на $\rho g H'$:

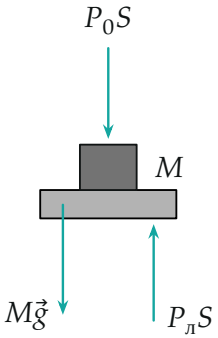
$$P_л = P_0 + \frac{mg}{1{,}5S} + \rho g H'.$$

6. Условие равновесия левого поршня с грузом M в проекции на ось y. Вверх — сила давления жидкости $P_л S$, вниз — атмосфера $P_0 S$ и вес груза Mg; пружина не деформирована:

$$P_л S - P_0 S - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Mg}{S} = \frac{mg}{1{,}5S} + \rho g\Big(h + \frac{5}{3}x\Big).$$

Подставим x из пункта 1:

$$M = \frac{2}{3}m + \rho S\Big(h + \frac{5\rho g h S}{3k}\Big) = \frac{2}{3}m + \rho h S\Big(1 + \frac{5\rho g S}{3k}\Big).$$



Силы на левый поршень вместе с грузом M: атмосфера и вес груза вниз, давление жидкости вверх; пружина не деформирована и не действует.

Обратите внимание. Нельзя считать, что разность уровней осталась h: жидкость перетекает, левый уровень сдвигается на x, а правый (сечение в полтора раза больше) — на $\frac{2}{3}x$, отсюда $\frac{5}{3}x$. Груз m входит в ответ с множителем $\frac{2}{3}$: давление, которое он создаёт, распределено по большей площади $1{,}5S$.

Проверка. Размерности: $\frac{\rho ghS}{k} = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^2}{\text{Н/м}} = \text{м}$; ρhS — кг, $\frac{\rho gS}{k}$ — безразмерно. Предел: очень жёсткая пружина, $k \to \infty$ — поршни почти не сдвигаются, $x \to 0$ и $M \to \frac{2}{3}m + \rho hS$: левый груз уравновешивает правый груз (давление $mg/(1{,}5S)$) и столб жидкости высотой h. При $m = 0$, $h \to 0$ получаем $M \to 0$ — пружина и так не деформирована. Численно (python) при $g = 10$ м/с^2, $\rho = 10^3$ кг/м^3, $S = 10^{-2}$ м^2, $h = 0{,}1$ м, $k = 10^3$ Н/м, $m = 1{,}5$ кг: $x = 1$ см, $H' \approx 11{,}67$ см, $M \approx 2{,}17$ кг — обе формулы дают одно число.

Ответ. 1) $x = \dfrac{\rho ghS}{k}$ (пружина сжата); 2) $M = \dfrac{2}{3}m + \rho hS\left(1 + \dfrac{5\rho gS}{3k}\right)$.