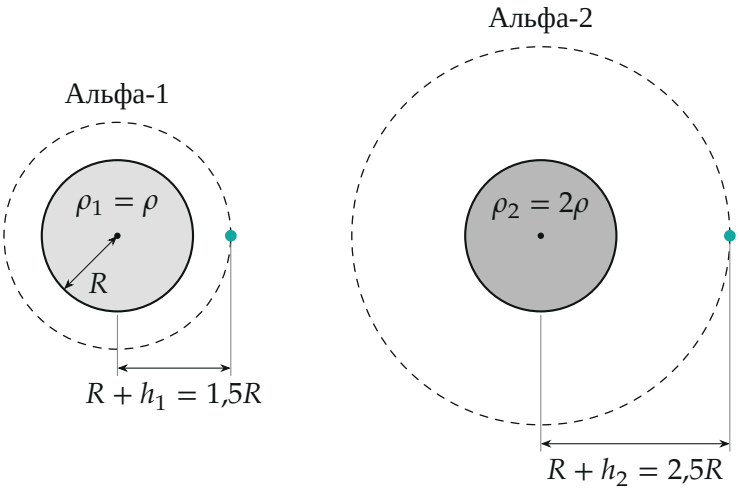
Две планеты и спутники

Задача 3. [Физтех 2021/22, 9 класс, варианты 9-03–9-04, задача 3] У двух планет Альфа-1 и Альфа-2 одинаковые радиусы R, а плотности планет равны соответственно $\rho_1 = \rho$ и $\rho_2 = 2\rho$. Гравитационная постоянная G. Объём шара $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

1. Найдите ускорение g свободного падения на расстоянии $4R$ от центра планеты Альфа-1.
2. Найдите отношение T_2/T_1 периодов обращения спутников, которые движутся по круговым орбитам вокруг данных планет. Высоты орбит спутников равны соответственно $h_1 = 0{,}5R$ и $h_2 = 1{,}5R$.



Поясняющий рисунок: планеты одного радиуса R, у второй плотность вдвое больше; пунктир — орбиты спутников (в масштабе).

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на закон всемирного тяготения и движение по окружности. Планета — однородный шар, а шар притягивает внешнее тело так же, как точка той же массы в его центре. Значит, ускорение свободного падения вне планеты зависит только от массы планеты и расстояния до центра. Спутник на круговой орбите движется

равномерно по окружности: сила тяготения сообщает ему центростремительное ускорение.

Обозначения. M_1, M_2 — массы планет; r — расстояние от центра планеты; m — масса пробного тела или спутника; $r_1 = R + h_1$, $r_2 = R + h_2$ — радиусы орбит; v — скорость спутника.

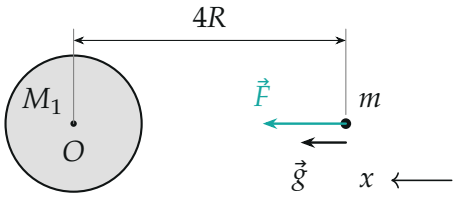
Пункт 1.

1. Масса планеты. Плотность — масса единицы объёма, поэтому

$$M_1 = \rho_1 V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, \qquad M_2 = \rho_2 V = \frac{8}{3}\pi R^3 \rho.$$

2. Второй закон Ньютона для тела m на расстоянии $4R$. На тело действует одна сила — сила тяготения $\vec{F}$ к центру планеты, и сообщает ему ускорение свободного падения $\vec{g}$: $m\vec{g} = \vec{F}$. Ось x направим к центру планеты, тогда в проекции на неё

$$mg = G\frac{mM_1}{(4R)^2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{GM_1}{16R^2} = \frac{G}{16R^2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{\pi}{12} G\rho R.$$



Пробное тело m на расстоянии $4R$: сила тяготения $\vec{F}$ и ускорение $\vec{g}$ направлены к центру O, ось x — туда же.

Пункт 2.

3. Второй закон Ньютона для спутника. Спутник движется по окружности радиуса r с постоянной по модулю скоростью v, значит, его ускорение центростремительное, $a = v^2/r$, направлено к центру. Единственная сила — тяготение планеты. В проекции на ось x к центру:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}.$$

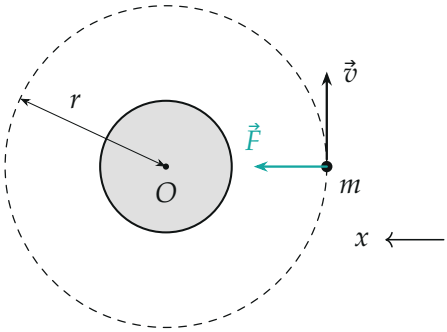
4. Период. За период спутник проходит длину окружности: $v = \dfrac{2\pi r}{T}$. Подставляем:

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{GM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}.$$

Массу пишем через плотность, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_i$:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_i} = \frac{3\pi}{G\rho_i}\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Период зависит только от плотности и отношения r/R, а не от R отдельно — поэтому радиус планеты в ответ не войдёт.

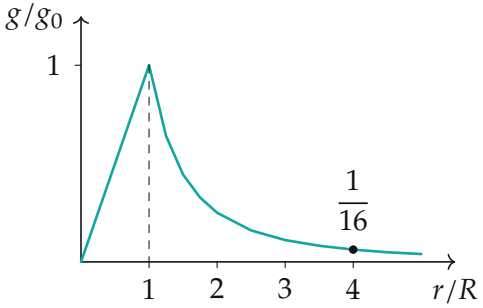


Спутник на круговой орбите радиуса r: скорость $\vec{v}$ по касательной, сила тяготения $\vec{F}$ к центру даёт центростремительное ускорение.

5. Отношение периодов. Для двух спутников $r_1/R = 1{,}5$, $r_2/R = 2{,}5$:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{2{,}5}{1{,}5}\right)^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{125}{27} = \frac{125}{54}, \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 1{,}52.$$

Два эффекта спорят: вторая планета вдвое плотнее (тяжелее), это ускоряет спутник и уменьшает период в $\sqrt{2}$ раз; зато его орбита в $5/3$ раза больше, и период растёт в $(5/3)^{3/2} \approx 2{,}15$ раза. Орбита побеждает.



Ускорение свободного падения Альфа-1 в долях $g_0 = \frac{4}{3}\pi G\rho R$ (на поверхности): снаружи оно убывает как $1/r^2$, на расстоянии $4R$ — в 16 раз меньше, чем на поверхности.

Обратите внимание. В законе тяготения стоит расстояние до *центра* планеты, $R + h$, а не высота h над поверхностью.

Проверка. Размерность: $[G\rho R] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\text{м} = \frac{\text{Н}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. На поверхности ($r = R$) формула шага 2 даёт $g_0 = \frac{4}{3}\pi G\rho R$, и $g = g_0/16 = \frac{\pi}{12}G\rho R$ — то же. Второй способ для пункта 2 — третий закон Кеплера $T^2 \propto r^3/M$: $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{125}{27}$, совпало.

Ответ. 1) $g = \dfrac{\pi}{12}G\rho R$; 2) $\dfrac{T_2}{T_1} = \sqrt{\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\left(\dfrac{R+h_2}{R+h_1}\right)^3} = \dfrac{5}{3}\sqrt{\dfrac{5}{6}} \approx 1{,}52$.