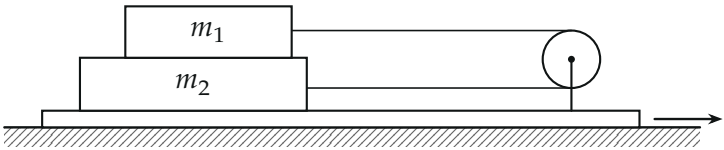
Доска с блоком и ускорением, бруски на нити

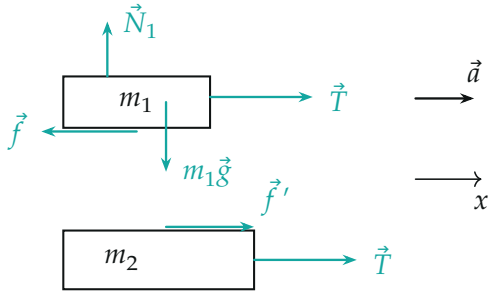
Задача 4. [Физтех 2021/22, 9 класс, варианты 9-03–9-04, задача 4] На горизонтальном столе находится доска, на которой укреплён неподвижный блок, а также бруски, соединённые нитью. Массы брусков $m_1 = m$, $m_2 = 2m$. Коэффициент трения скольжения верхнего бруска по нижнему равен μ, трение между доской и нижним бруском отсутствует. Доску приводят в движение с постоянным ускорением, направленным вправо. Массой нити и блока, а также трением в оси блока можно пренебречь.



1. Найдите максимальное ускорение a_0 доски, при котором бруски не будут проскальзывать относительно друг друга.
2. Найдите силу T натяжения нити, если доска движется с ускорением $a > a_0$.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на второй закон Ньютона для связанных тел с трением покоя и скольжения. Доска тянет за собой блок, блок через нить тянет оба бруска вправо с одной и той же силой T (нить невесома, блок идеален). Если бы между брусками не было трения, одинаковая сила разогнала бы лёгкий брусок m_1 быстрее тяжёлого m_2: верхний обгонял бы нижний. Трение между ними этому мешает: на m_1 оно действует влево, на m_2 — вправо. Пока трению покоя хватает, бруски едут вместе с доской; при большом ускорении трение покоя достигает предела $\mu m_1 g$, и бруски проскальзывают.

Обозначения. Ось x — вправо (вдоль ускорения доски), систему отсчёта связываем со столом. f — сила трения между брусками; N_1 — сила нормальной реакции, с которой m_2 давит на m_1; b — ускорение бруска m_1 относительно доски.



Горизонтальные силы на бруски (тела разнесены). Нить тянет оба вправо с силой $\vec{T}$; трение $\vec{f}$ на верхний брусок — влево, на нижний $\vec{f}\,' = -\vec{f}$ — вправо. Вертикальные силы на m_2 (тяжесть, давление m_1, реакция доски) скомпенсированы и не показаны.

Пункт 1.

1. Бруски едут вместе с доской. Без проскальзывания оба бруска движутся с ускорением доски a (блок закреплён на доске, нить не растягивается, m_1 на m_2 не скользит). Второй закон Ньютона для каждого бруска в проекции на ось x:

$$m_1: \quad T - f = m_1 a, \qquad\qquad m_2: \quad T + f = m_2 a.$$

2. Нужная сила трения. Вычитаем первое из второго:

$$2f = (m_2 - m_1)a \quad \Rightarrow \quad f = \frac{(m_2 - m_1)a}{2} = \frac{ma}{2}.$$

Знак плюс подтверждает направление: трение на m_1 действительно влево.

3. Предел трения покоя. Второй закон Ньютона для m_1 по вертикали даёт $N_1 = m_1 g$. Трение покоя не больше $\mu N_1 = \mu m_1 g$:

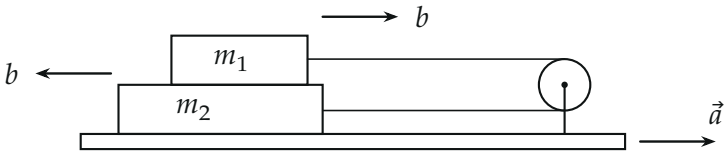
$$\frac{ma}{2} \le \mu m g \quad \Rightarrow \quad a \le 2\mu g, \qquad a_0 = \frac{2\mu m_1 g}{m_2 - m_1} = 2\mu g.$$

Пункт 2.

4. Связь ускорений при проскальзывании. Нить: верхний кусок от m_1 до блока плюс нижний от m_2 до блока — постоянная длина. Если m_1

сдвинулся относительно доски на Δs вправо (к блоку), то m_2 сдвинулся на Δs влево. Значит, относительно доски ускорения брусков $+b$ и $-b$, а относительно стола

$$a_{1x} = a + b, \qquad a_{2x} = a - b.$$



Относительно доски: верхний брусок уходит к блоку с ускорением b, нижний — от блока с тем же b (длина нити постоянна). Доска с блоком движется с ускорением $\vec{a}$.

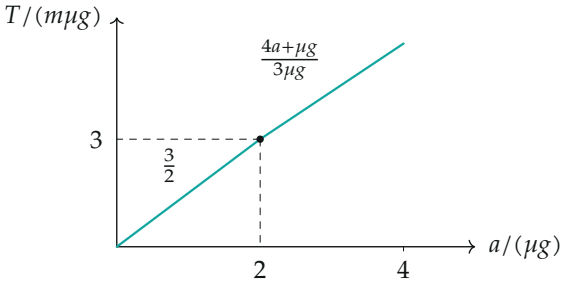
5. Второй закон Ньютона при скольжении. Теперь трение — трение скольжения, $f = \mu m_1 g = \mu m g$, направления прежние (верхний брусок скользит по нижнему вправо, $b > 0$):

$$m_1: \quad T - \mu m g = m(a + b), \qquad m_2: \quad T + \mu m g = 2m(a - b).$$

6. Исключаем b. Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым:

$$3T - \mu m g = 4ma \quad \Rightarrow \quad T = \frac{(4a + \mu g)\, m}{3}.$$

Проверим предположение о направлении скольжения: из первого уравнения $b = \dfrac{T}{m} - \mu g - a = \dfrac{a - 2\mu g}{3} > 0$ при $a > a_0$ — верхний брусок действительно едет к блоку.



Натяжение нити от ускорения доски. До $a_0 = 2\mu g$ бруски едут вместе: из суммы уравнений шага 1 $T = \frac{m_1+m_2}{2}a = \frac{3}{2}ma$. После — формула шага 6. В точке a_0 обе дают $T = 3\mu mg$: график непрерывен.

Обратите внимание. Трение между брусками — внутренняя сила пары, но на каждый брусок она действует в свою сторону. Её направление определяется тем, куда верхний брусок скользил бы *без* трения, — поэтому сначала решаем мысленную задачу без трения.

Проверка. Размерность: $[m\mu g] = [ma] =$ Н. Непрерывность при $a = a_0$: $\frac{(8\mu g+\mu g)m}{3} = 3\mu mg = \frac{3}{2}m \cdot 2\mu g$ — совпало с режимом без проскальзывания. Предел $\mu = 0$: $a_0 = 0$, бруски скользят при любом ускорении, и $T = \frac{4}{3}ma = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}a$ — знакомая формула машины Атвуда, где роль g играет ускорение доски.

Ответ. 1) $a_0 = \dfrac{2\mu m_1 g}{m_2 - m_1} = 2\mu g$; 2) $T = \dfrac{(4a + \mu g)\, m}{3}$.