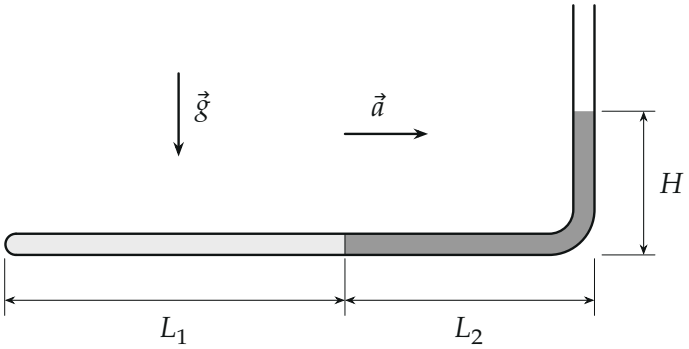
Изогнутая трубка с двумя жидкостями при ускорении

Задача 5. [Физтех 2021/22, 9 класс, варианты 9-03–9-04, задача 5] Тонкая изогнутая трубка состоит из горизонтального участка, запаянного с одного конца, и вертикального участка, открытого в атмосферу. Трубка заполнена двумя несмешивающимися жидкостями: плотности ρ_1 в горизонтальном участке и плотности ρ_2 в горизонтальном и вертикальном участках (см. рис.). Трубка движется с ускорением $a = \dfrac{g}{8}$, направленным горизонтально. Геометрические размеры указаны на рисунке, $H = L$, $L_1 = 3L$, $L_2 = 2L$. Атмосферное давление P_0.



1. Найдите давление P_1 в жидкости в месте изгиба трубки.
2. Найдите давление P_2 в жидкости у запаянного конца трубки.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на гидростатику в ускоренно движущемся сосуде. Жидкость покоится относительно трубки, значит, каждый её кусок движется с ускорением $\vec{a}$ — горизонтально. Вертикальный столб по вертикали не ускоряется: давление в нём меняется с глубиной только из-за веса. Горизонтальный столб разгоняется вправо, и толкать его может только разность давлений на концах: слева, у запаянного конца, давление должно быть больше.

Обозначения. S — площадь сечения трубки (тонкая, одинаковая по длине); ось x — вправо, по ускорению; ось y — вверх. Изгиб считаем

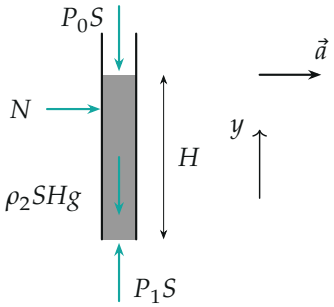
точкой (трубка тонкая): вертикальный столб жидкости ρ_2 имеет высоту H, горизонтальный состоит из ρ_1 длиной L_1 и ρ_2 длиной L_2.

Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для вертикального столба в проекции на ось y. Возьмём жидкость от открытой поверхности до изгиба. По вертикали на неё действуют сила давления атмосферы P_0S вниз, сила тяжести $\rho_2 SHg$ вниз и сила давления снизу P_1S вверх. Стенки трубки давят горизонтально (левая стенка толкает столб вправо, сообщая ему ускорение a), на ось y не проецируются. Ускорение по y равно нулю:

$$P_1S - P_0S - \rho_2 SHg = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_0 + \rho_2 gH = P_0 + \rho_2 gL.$$

Горизонтальное ускорение трубки сюда не вошло: его обеспечивают боковые стенки вертикального участка.



Вертикальный столб жидкости ρ_2 массой $m = \rho_2 SH$: по вертикали — давление атмосферы, тяжесть и давление снизу P_1S; горизонтальную силу N, нужную для ускорения $\vec{a}$, даёт стенка трубки.

Пункт 2.

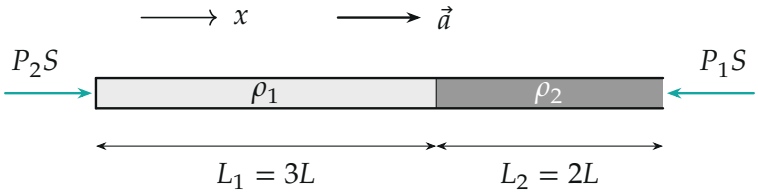
2. Второй закон Ньютона для горизонтального столба в проекции на ось x. Возьмём всю жидкость горизонтального участка, от запаянного конца до изгиба. Её масса

$$M = \rho_1 SL_1 + \rho_2 SL_2.$$

По горизонтали на неё действуют сила давления P_2S со стороны запаянного конца (вправо) и сила давления P_1S со стороны жидкости в изгибе

(влево). Сила тяжести и реакция нижней стенки вертикальны. Ускорение — a вправо:

$$P_2S - P_1S = (\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2)Sa \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_1 + (\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2)\,a.$$

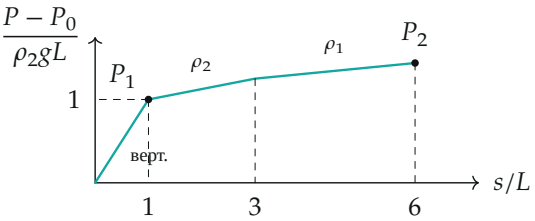


Горизонтальный столб из двух жидкостей разгоняется вправо только разностью сил давления на торцах: $P_2S > P_1S$.

3. Подстановка. $a = g/8$, $L_1 = 3L$, $L_2 = 2L$:

$$P_2 = P_0 + \rho_2 gL + (3\rho_1 L + 2\rho_2 L)\frac{g}{8} = P_0 + \frac{5}{4}\rho_2 gL + \frac{3}{8}\rho_1 gL.$$

4. Как меняется давление вдоль трубки. Внутри вертикального столба давление растёт с глубиной на $\rho_2 g$ на единицу длины, вдоль горизонтального — от изгиба к запаянному концу на $\rho_2 a$ в жидкости ρ_2 и на $\rho_1 a$ в жидкости ρ_1. Это тот же второй закон Ньютона для малого кусочка столба. График ниже построен для $\rho_1 = \rho_2/2$ (для примера; в ответе отношение плотностей любое).



Давление вдоль трубки от открытой поверхности ($s = 0$) через изгиб ($s = L$) до запаянного конца ($s = 6L$), при $\rho_1 = \rho_2/2$. В вертикальном участке

наклон $\rho_2 g$, в горизонтальном — в 8 раз меньше ($\rho_2 a$), в жидкости ρ_1 — ещё вдвое меньше.

Обратите внимание. В горизонтальном участке давление не одинаково: при ускорении оно растёт в сторону, *противоположную* ускорению, — задняя стенка толкает жидкость. Без ускорения было бы $P_2 = P_1$.

Проверка. Размерность: $[\rho g L] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{Па}$. Предел $a \to 0$: $P_2 \to P_1 = P_0 + \rho_2 g L$ — обычная гидростатика сообщающегося сосуда. Второй способ — в системе отсчёта трубки: к тяжести добавляется сила инерции $-m\vec{a}$, «эффективное ускорение свободного падения» $\vec{g} - \vec{a}$ имеет горизонтальную составляющую a влево, и вдоль горизонтального участка давление растёт влево на ρa на единицу длины — те же $(3\rho_1 + 2\rho_2)\frac{gL}{8}$.

Ответ. 1) $P_1 = P_0 + \rho_2 g L$; 2) $P_2 = P_0 + \frac{5}{4}\rho_2 g L + \frac{3}{8}\rho_1 g L$.