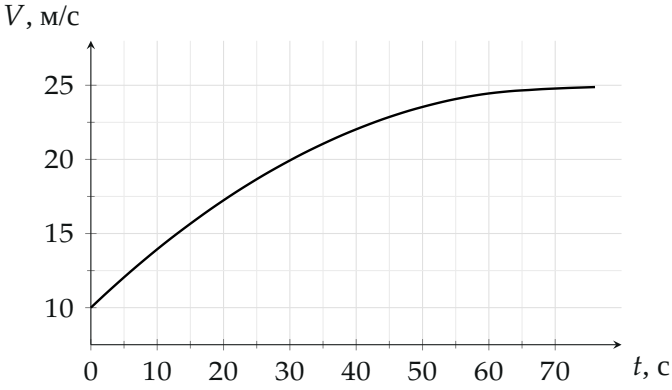
Разгон автомобиля по графику скорости

Задача 1. [Физтех 2022/23, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 1] Автомобиль массой $m = 1800$ кг движется с постоянной скоростью и затем разгоняется на прямолинейном горизонтальном участке дороги. График зависимости скорости от времени при разгоне показан на рисунке. В конце разгона сила тяги двигателя равна $F_k = 500$ Н. Считать, что при разгоне сила сопротивления движению пропорциональна скорости. Колёса считать лёгкими.

1. Используя график, найти ускорение автомобиля при скорости $V_1 = 20$ м/с.
2. Найти силу тяги F_1 при скорости V_1.
3. Какая мощность P_1 передаётся от двигателя на ведущие колёса при скорости V_1?

Требуемая точность численного ответа на первый вопрос ориентировочно 10%.



▲ **Решение. Что происходит.** Автомобиль разгоняется по прямой. Вперёд его толкает сила тяги F — это сила трения, с которой дорога действует на ведущие колёса. Назад тянет сила сопротивления αV. Пока скорость мала, сопротивление мало, и скорость растёт быстро. С ростом V сопротивление растёт, разность $F - \alpha V$ уменьшается, ускорение падает,

и график выходит на горизонталь: скорость V_K, к которой он приближается, — та, при которой тяга и сопротивление сравнялись. Это даёт коэффициент α. Дальше нужны два инструмента: ускорение в данный момент — наклон касательной к графику, а связь ускорения с силами даёт второй закон Ньютона. Задача на динамику с сопротивлением, пропорциональным скорости, и графиком $V(t)$.

Обозначения. Ось x направлена по движению автомобиля. Сила сопротивления $F_c = \alpha V$, где α — постоянный коэффициент. V_K — скорость в конце разгона; a_1, F_1, P_1 — ускорение, сила тяги и мощность при скорости V_1.

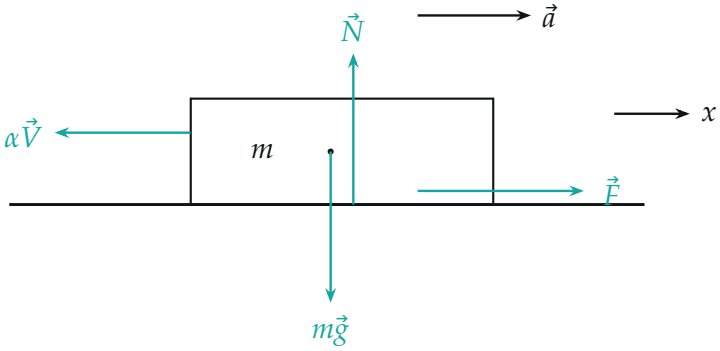
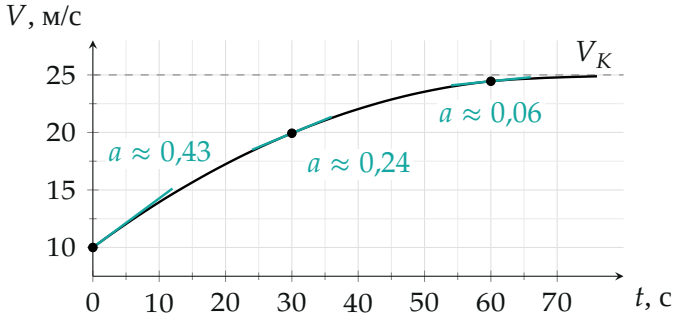


Схема «автомобиль m»: по вертикали $N = mg$, по горизонтали тяга F вперёд и сопротивление αV назад.

Подготовка. Коэффициент сопротивления α. В конце разгона график почти горизонтален: скорость перестала расти, ускорение равно нулю. Запишем второй закон Ньютона для автомобиля в проекции на ось x (по горизонтали действуют только тяга и сопротивление; сила тяжести и реакция опоры вертикальны, и на проекцию на x не влияют):

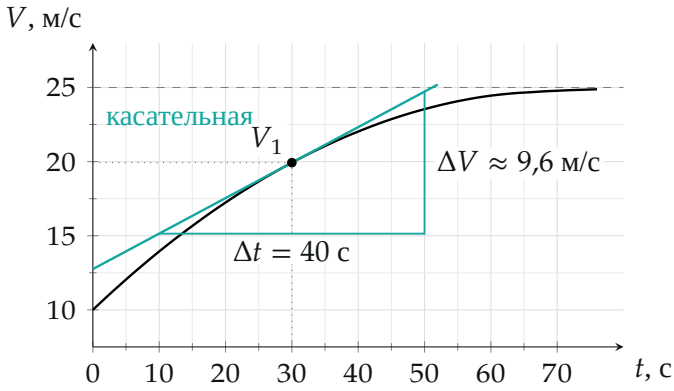
$$0 = F_K - \alpha V_K, \qquad \alpha = \frac{F_K}{V_K} = \frac{500\ \text{Н}}{25\ \text{м/с}} = 20\ \text{Н}\cdot\text{с/м},$$

где $V_K = 25$ м/с — значение, к которому приближается график.



Касательные (бирюза) к графику в начале, посередине и в конце разгона: наклон, то есть ускорение (в м/с^2), убывает, и кривая выходит на горизонталь $V_K = 25$ м/с.

Пункт 1. Ускорение при $V_1 = 20$ м/с. Ускорение — скорость изменения скорости, $a = dV/dt$, поэтому на графике $V(t)$ оно равно наклону касательной к кривой. Скорости 20 м/с отвечает момент $t \approx 30$ с. Проведём в этой точке касательную — прямую, которая касается кривой и повторяет её направление, — и построим на ней прямоугольный треугольник с длинными катетами: чем они длиннее, тем меньше влияет неточность чтения графика.



Касательная к графику в точке $V_1 = 20$ м/с ($t \approx 30$ с) и треугольник для отсчёта наклона.

Получаем

$$a_1 = \frac{\Delta V}{\Delta t} \approx \frac{9{,}6\ \text{м/с}}{40\ \text{с}} \approx 0{,}24\ \text{м/с}^2.$$

Ускорение положительно: автомобиль набирает скорость.

Обратите внимание: ускорение — наклон касательной *в этой точке*, а не отношение $V_1/t_1 = 20/30$. Скорость в начале разгона не была нулём, и кривая не прямая, так что такое отношение ничего не измеряет.

Второй способ: возьмём хорду, симметричную относительно точки $t = 30$ с. По графику $V(20\text{ с}) \approx 17{,}2$ м/с, $V(40\text{ с}) \approx 22{,}0$ м/с, и

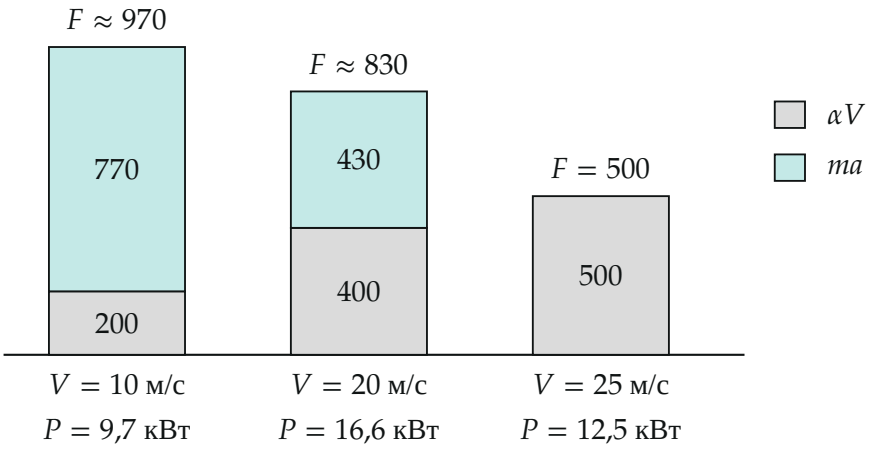
$$a_1 \approx \frac{22{,}0 - 17{,}2}{20}\ \text{м/с}^2 = 0{,}24\ \text{м/с}^2,$$

то же число: у плавной кривой симметричная хорда почти параллельна касательной в средней точке.

Пункт 2. Сила тяги F_1. Запишем второй закон Ньютона для автомобиля в проекции на ось x в момент, когда скорость равна V_1 (сопротивление в этот момент αV_1):

$$ma_1 = F_1 - \alpha V_1, \qquad F_1 = \alpha V_1 + ma_1 = 20 \cdot 20 + 1800 \cdot 0{,}24 \approx 830\ \text{Н}.$$

Тяга больше сопротивления на 430 Н — на эту разность автомобиль и разгоняется.

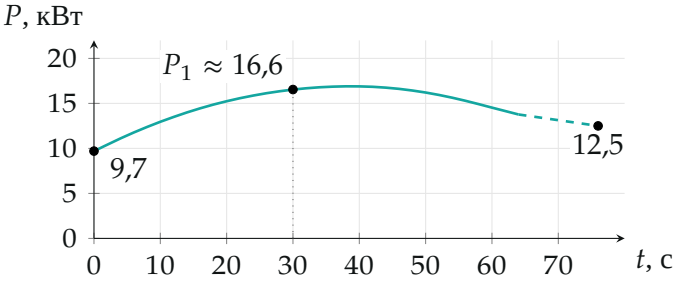


Баланс сил в Н: тяга F складывается из сопротивления αV (серое) и силы ma, разгоняющей автомобиль (бирюзовое); внизу — скорость и мощность $P = FV$.

Пункт 3. Мощность P_1. Колёса лёгкие: их момент инерции пренебрежимо мал, поэтому суммарный момент сил на колёсах равен нулю. Момент двигателя M уравновешен моментом силы трения дороги: $M = FR$, где R — радиус колёс. Колёса катятся без проскальзывания, $\omega = V/R$. Мощность, передаваемая двигателем на колёса,

$$P = M\omega = FR \cdot \frac{V}{R} = FV, \qquad P_1 = F_1 V_1 \approx 830 \cdot 20 \text{ Вт} \approx 17 \text{ кВт}.$$

Если бы колёса были тяжёлыми, часть мощности уходила бы на раскрутку колёс, и формула $P = FV$ не работала бы.



Мощность на колёсах $P = FV$ по ходу разгона (график $V(t)$ и тяга F взяты из рисунков выше); пунктир — от $t = 64$ с до конечного значения $F_K V_K = 12{,}5$ кВт.

Проверка. Размерность: αV — (Н·с/м)·(м/с) = Н; FV — Н·м/с = Вт. Предел: в конце разгона $a = 0$, получаем $F = \alpha V_K = F_K$ и $P = F_K V_K = 12{,}5$ кВт — тяга убывает, а мощность проходит через максимум около 17 кВт. Сопротивление при V_1 равно $\alpha V_1 = 400$ Н, тяга 830 Н, то есть примерно вдвое больше — значит, график с ускорением 0,24 м/с^2 согласован с заданным F_K. Смысл: чем быстрее едет автомобиль, тем больше сил уходит на сопротивление и тем меньше остаётся на разгон.

Ответ. 1) $a_1 \approx 0{,}24$ м/с^2 (допустимо 0,21–0,29 м/с^2); 2) $F_1 \approx 830$ Н; 3) $P_1 \approx 17$ кВт.