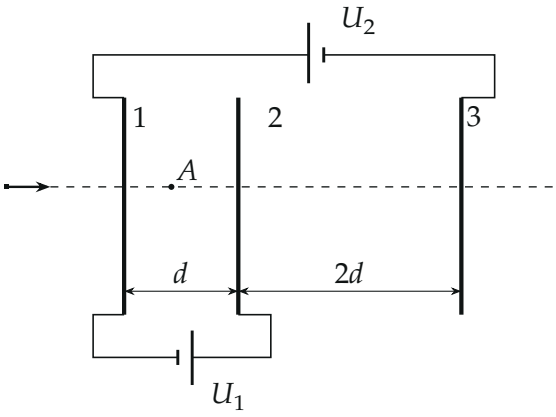
Частица пролетает через три сетки

Задача 3. [Физтех 2022/23, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 3] Три проводящие плоские мелкие сетки находятся друг напротив друга на расстояниях d и $2d$ (см. рис.). Размеры сеток значительно больше d. Изначально сетки не заряжены. К сеткам подсоединили источники с напряжением $U_1 = U$ и $U_2 = 4U$. Частица массой m и зарядом $q > 0$ движется по направлению к сеткам и перпендикулярно сеткам, имея скорость V_0 на расстоянии от сеток, намного большем их размеров. Частица пролетает через сетки, не отклоняясь от прямолинейной траектории. Заряд q намного меньше модуля зарядов сеток.

1. Найти модуль ускорения частицы в области между сетками 1 и 2.
2. Найти разность $K_1 - K_2$, где K_1 и K_2 — кинетические энергии частицы при пролёте сеток 1 и 2.
3. Найти скорость частицы в точке A на расстоянии $d/3$ от сетки 1.



▲ **Решение. Что происходит.** Сетки большие и стоят близко (расстояния d и $2d$ много меньше их размеров), поэтому между соседними сетками поле однородно, а вне стопки сеток практически нулевое. Источники задают разности потенциалов между сетками, и потенциал вдоль оси меняется линейно между сетками и постоянен вне их. Частица заряжена слабо и поля не искажает; на неё действует только электрическая сила,

поэтому работа поля равна изменению кинетической энергии, а её можно записать через разность потенциалов. Для пункта 3 нужен потенциал в точке A относительно бесконечности, где он равен нулю и где задана скорость V_0, — одних напряжений источников для этого мало, и в дело вступает электронейтральность системы сеток. Класс задачи: поле плоских сеток — потенциал — закон сохранения энергии.

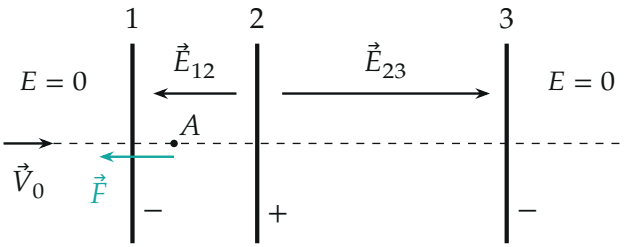
Обозначения. Ось x направим вдоль движения частицы: из бесконечности слева направо через сетки 1, 2, 3. φ_1, φ_2, φ_3 — потенциалы сеток; на бесконечности $\varphi = 0$. На условных обозначениях источников длинная пластина — «плюс». Верхний источник соединён плюсом с сеткой 1 и минусом с сеткой 3, нижний — минусом с сеткой 1 и плюсом с сеткой 2, значит,

$$\varphi_1 - \varphi_3 = U_2 = 4U, \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = U_1 = U.$$

Пункт 1. Ускорение между сетками 1 и 2. Поле между сетками 1 и 2 однородно, его напряжённость равна отношению напряжения к расстоянию: $E_{12} = U_1/d = U/d$. Потенциал растёт слева направо ($\varphi_2 > \varphi_1$), поэтому поле направлено *против* оси x, от сетки 2 к сетке 1. Запишем второй закон Ньютона для частицы в проекции на ось x (других сил, кроме электрической qE_{12}, нет):

$$ma_x = -qE_{12} = -\frac{qU}{d}, \qquad |a| = \frac{qU}{md}.$$

Ускорение направлено против скорости: частица тормозится.



Поля между сетками (в масштабе $E_{12} = U/d$, $E_{23} = 5U/(2d)$), знаки зарядов сеток и сила $\vec{F}$ на частицу.

Пункт 2. Разность $K_1 - K_2$. Запишем закон изменения кинетической энергии для участка от сетки 1 до сетки 2: работа электрической силы равна изменению кинетической энергии. Сила постоянна ($F = qU/d$, против движения), путь равен d:

$$K_2 - K_1 = -F\,d = -\frac{qU}{d}\,d = -qU, \qquad K_1 - K_2 = qU.$$

То же через потенциалы: $K_1 + q\varphi_1 = K_2 + q\varphi_2$, откуда $K_1 - K_2 = q(\varphi_2 - \varphi_1) = qU$. Кинетическая энергия частицы уменьшилась на qU.

Пункт 3. Скорость в точке A.

1. Потенциал сетки 1 относительно бесконечности. Напряжения U_1 и U_2 определяют только разности $\varphi_2 - \varphi_1$ и $\varphi_1 - \varphi_3$. Источники лишь перегоняют заряд между сетками, не добавляя его, поэтому суммарный заряд трёх сеток остаётся нулевым. Снаружи стопка выглядит как один тонкий нейтральный диск; потенциал слева от него φ_1, справа φ_3. Его «симметричная» часть $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3)$ создаётся суммарным зарядом диска, то есть равна нулю, а остаётся только «двойной слой»: $\varphi_3 = -\varphi_1$. Для плоского конденсатора из двух больших пластин с зарядами $\pm Q$ это знакомый факт: потенциалы пластин $\pm U/2$ относительно бесконечности.

Строго это видно так. Сетки — большие диски радиуса $R \gg d$, заряженные почти равномерно, с плотностями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в точках $x_1 = 0$, $x_2 = d$, $x_3 = 3d$. Потенциал одного диска на его оси (принцип суперпозиции, сложение вкладов колец)

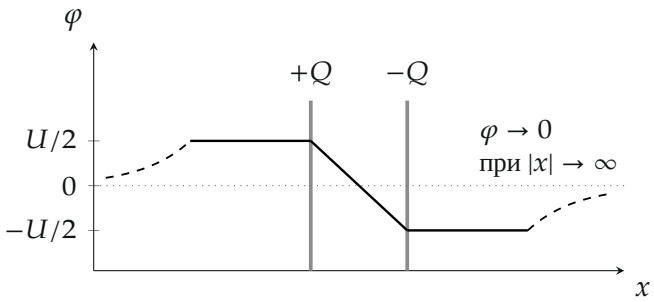
$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\Big(\sqrt{(x - x_i)^2 + R^2} - |x - x_i|\Big) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R - |x - x_i|).$$

Сложим три диска. Слагаемые с R дают $\frac{R}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0$ — здесь и работает нейтральность, — и остаётся

$$\varphi_1 = -\frac{\sigma_2 d + 3\sigma_3 d}{2\varepsilon_0}, \qquad \varphi_3 = -\frac{3\sigma_1 d + 2\sigma_2 d}{2\varepsilon_0},$$

$$\varphi_1 + \varphi_3 = -\frac{3d}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0.$$

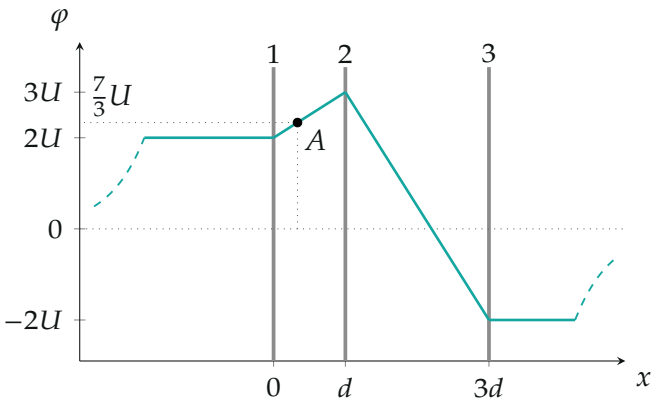
Значит, $\varphi_3 = -\varphi_1$ при *любых* зарядах сеток с нулевой суммой; поправки — порядка d/R. Численная проверка с зарядами из «Проверки» ниже при $R = 10^4 d$: $\varphi_1 = 1{,}9995\,U$, $\varphi_2 = 2{,}9997\,U$, $\varphi_3 = -1{,}9999\,U$, $\varphi_A = 2{,}333\,U$ — те же $2U$, $3U$, $-2U$, $\frac{7}{3}U$.



Две большие пластины с зарядами $\pm Q$: потенциал рядом с пластинами $\pm U/2$ и симметрично убывает до нуля на расстояниях порядка размеров пластин (пунктир, масштаб по x условный).

Подставим в $\varphi_1 - \varphi_3 = 4U$ условие $\varphi_3 = -\varphi_1$: $2\varphi_1 = 4U$. Отсюда

$$\varphi_1 = 2U, \qquad \varphi_2 = \varphi_1 + U = 3U, \qquad \varphi_3 = -2U.$$



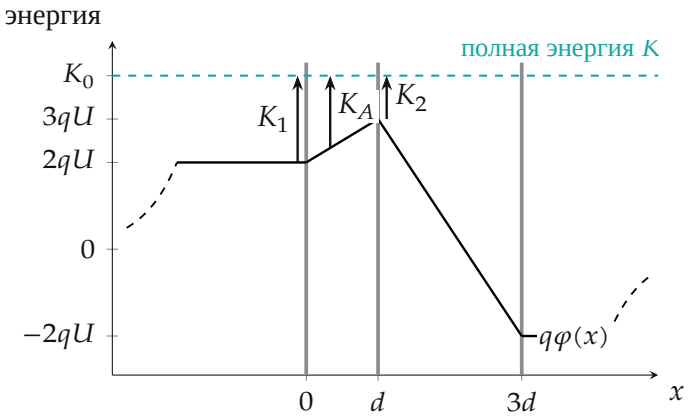
Потенциал вдоль оси (серые линии — сетки 1, 2, 3 в точках 0, d, $3d$): между сетками он линеен, вне сеток постоянен и стремится к нулю на больших расстояниях. Точка A — на трети промежутка 1–2.

2. Потенциал в точке A**.** Между сетками 1 и 2 потенциал меняется линейно от φ_1 до $\varphi_2 = \varphi_1 + U$ на длине d, а точка A отстоит от сетки 1 на $d/3$:

$$\varphi_A = \varphi_1 + \frac{U}{d} \cdot \frac{d}{3} = 2U + \frac{U}{3} = \frac{7}{3}U.$$

3. Закон сохранения энергии. Частица движется из бесконечности ($\varphi = 0$, скорость V_0) в точку A под действием только электрической силы:

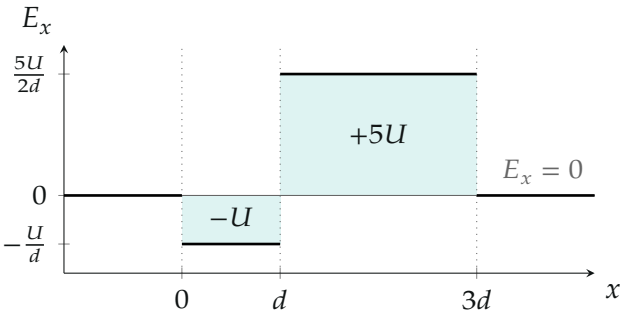
$$\frac{1}{2}mV_0^2 + q \cdot 0 = \frac{1}{2}mV_A^2 + q\varphi_A \;\Rightarrow\; V_A = \sqrt{V_0^2 - \frac{2q\varphi_A}{m}} = \sqrt{V_0^2 - \frac{14\,qU}{3m}}.$$



Энергетическая диаграмма: чёрная линия — потенциальная энергия $q\varphi(x)$, бирюзовый пунктир — полная энергия $K_0 = \frac{1}{2}mV_0^2$ (для рисунка $K_0 = 4qU$). Кинетическая энергия — вертикальное расстояние между ними.

Второй способ для A: на сетке 1 кинетическая энергия $K_1 = K_0 - q\varphi_1 = K_0 - 2qU$; от сетки 1 до A поле тормозит частицу на пути $d/3$ с силой qU/d, поэтому $K_A = K_1 - \frac{qU}{d} \cdot \frac{d}{3} = K_0 - \frac{7}{3}qU$, и $V_A = \sqrt{2K_A/m}$ — то же.

Обратите внимание: потенциал в точке A отсчитывается от бесконечности, где $\varphi = 0$ и задана скорость V_0. Без условия $\varphi_3 = -\varphi_1$ задача не решается: напряжения U и $4U$ определяют лишь разности $\varphi_1 - \varphi_3$ и $\varphi_2 - \varphi_1$.



Проекция напряжённости на ось x: вне сеток поле равно нулю, между ними постоянно; площади закрашенных прямоугольников равны $-(\varphi_2 - \varphi_1) = -U$ и $-(\varphi_3 - \varphi_2) = +5U$.

Проверка. Размерность: qU — энергия, $qU/(md)$ — ускорение. Нейтральность: по скачкам поля на сетках (теорема Гаусса, $\sigma = \varepsilon_0 \Delta E_x$) заряды на единицу площади

$$\sigma_1 = -\varepsilon_0 \frac{U}{d}, \quad \sigma_2 = \frac{7}{2}\varepsilon_0 \frac{U}{d}, \quad \sigma_3 = -\frac{5}{2}\varepsilon_0 \frac{U}{d}, \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0,$$

в сумме нуль, как и требует нейтральность. Предел: при $U \to 0$ все сетки на нулевом потенциале и $V_A = V_0$ — верно. Условие пролёта: чтобы частица добралась до сетки 2, где потенциал наибольший ($\varphi_2 = 3U$), нужно $\frac{1}{2}mV_0^2 > 3qU$, то есть $V_0^2 > 6qU/m$; тогда подкоренное выражение в V_A положительно, ведь $14/3 < 6$. Смысл: подлетая к стопке, частица сначала тормозится полем, поэтому в точке A она медленнее, чем была вдали.

Ответ. 1) $a = \dfrac{qU}{md}$; 2) $K_1 - K_2 = qU$; 3) $V_A = \sqrt{V_0^2 - \dfrac{14\,qU}{3m}}$.