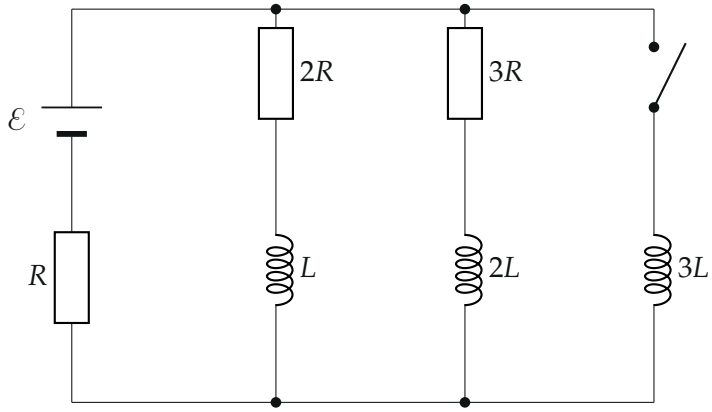
Цепь с катушками при замыкании ключа

Задача 4. [Физтех 2022/23, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 4] Параметры цепи указаны на схеме, все элементы идеальные. Ключ разомкнут, режим в цепи установился. Затем ключ замыкают.

1. Найти ток I_{10} через резистор с сопротивлением $2R$ при разомкнутом ключе.
2. Найти скорость возрастания тока в катушке индуктивностью $3L$ сразу после замыкания ключа.
3. Какой заряд протечёт через резистор с сопротивлением $2R$ при замкнутом ключе?

Ответы давать с числовыми коэффициентами в виде обыкновенных дробей.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это цепь с катушками, в которой ключ меняет схему. Две вещи про катушку знать достаточно. Первая: ток катушки не меняется скачком, иначе ЭДС самоиндукции $-L\dot{I}$ была бы бесконечной; поэтому в момент замыкания токи катушек L и $2L$ такие же, как были, а ток катушки $3L$ равен нулю. Вторая: когда токи перестали меняться, напряжение на катушке равно нулю — для постоянного тока катушка есть просто провод. Отсюда план: пункт 1 — обычная цепь

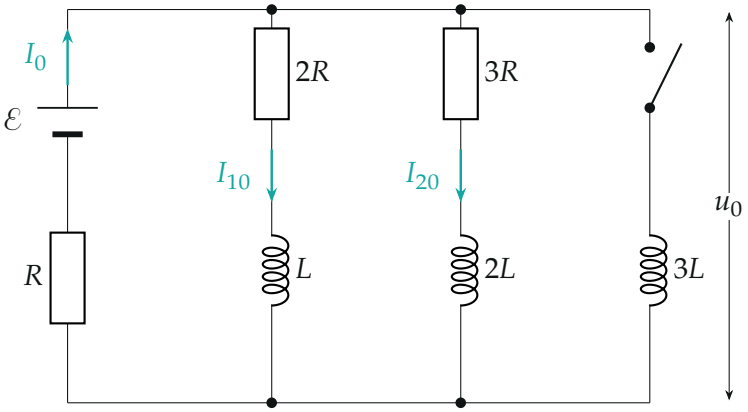
постоянного тока; пункт 2 — мгновенный снимок цепи сразу после замыкания, из него находим напряжение на катушке $3L$; пункт 3 — уравнение контура, записанное для малых промежутков времени и просуммированное от замыкания до установления: сумма $I\,dt$ даёт заряд.

Обозначения. $\mathcal{E}$ — ЭДС источника. I_0 — ток через источник и резистор R, I_{10} и I_{20} — токи в ветках с резисторами $2R$ и $3R$ при разомкнутом ключе. После замыкания: I_1, I_2, I_3 — токи в ветках с катушками L, $2L$, $3L$, а u — напряжение между верхним и нижним проводами параллельных веток. Токи в ветках отсчитываем вниз, от верхнего провода к нижнему (так течёт ток источника).

Пункт 1

1. Установившийся режим при разомкнутом ключе. Токи постоянны, напряжения на катушках равны нулю, поэтому цепь — это резисторы: R последовательно с параллельными $2R$ и $3R$. Сопротивление параллельной части $\dfrac{2R\cdot 3R}{2R+3R}=\dfrac{6R}{5}$, полное сопротивление $R+\dfrac{6R}{5}=\dfrac{11R}{5}$. Закон Ома для всей цепи:

$$I_0=\frac{\mathcal{E}}{11R/5}=\frac{5\mathcal{E}}{11R}.$$



Установившийся режим при разомкнутом ключе: ток источника I_0 делится между двумя ветками, на них одно и то же напряжение u_0.

2. Делим ток. Ветки $2R$ и $3R$ включены на одно и то же напряжение u_0, поэтому токи обратно пропорциональны сопротивлениям: $I_{10} : I_{20} = 3R : 2R = 3 : 2$. Складываются они в I_0:

$$I_{10} = \frac{3}{5} I_0 = \frac{3\mathcal{E}}{11R}, \qquad I_{20} = \frac{2}{5} I_0 = \frac{2\mathcal{E}}{11R}.$$

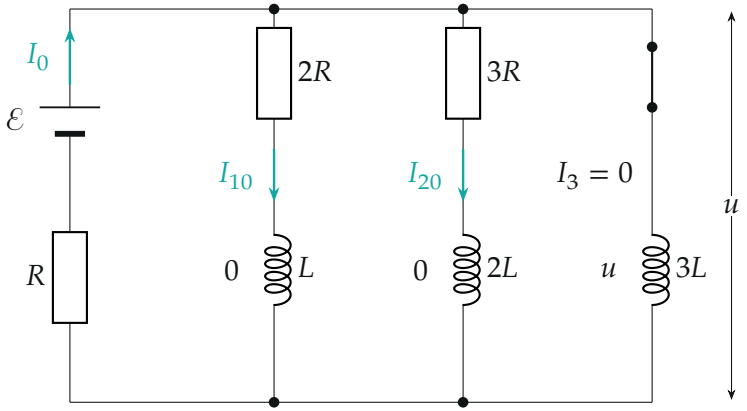
Напряжение между проводами $u_0 = I_{10} \cdot 2R = \dfrac{6\mathcal{E}}{11}$; оно же $\mathcal{E} - I_0 R = \dfrac{6\mathcal{E}}{11}$.

Пункт 2

3. Что известно сразу после замыкания. Токи катушек L и $2L$ не успели измениться: $I_1 = I_{10}$, $I_2 = I_{20}$. В новой ветке ток до замыкания был нулевым, значит, $I_3 = 0$. Первое правило Кирхгофа для верхнего провода: ток источника

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = I_{10} + I_{20} + 0 = I_0.$$

Ток источника остался прежним, поэтому прежним остался и ток через R, а значит, и напряжение $u = \mathcal{E} - I_0 R = \dfrac{6\mathcal{E}}{11} = u_0$.



Сразу после замыкания ключа: токи I_{10}, I_{20} прежние, в ветке с $3L$ ток нулевой; напряжение и равно прежнему u_0. Подписи 0, 0, u слева от катушек — напряжения на них.

4. Напряжения на катушках. Напряжение на катушке равно $L\dot{I}$ (ток и напряжение отсчитаны в одну сторону). На ветке с катушкой L: $u = 2RI_1 + L\dot{I}_1$, откуда $L\dot{I}_1 = u - 2RI_{10} = \frac{6\mathcal{E}}{11} - \frac{6\mathcal{E}}{11} = 0$; на ветке с $2L$ так же $2L\dot{I}_2 = u - 3RI_{20} = 0$. Токи в L и $2L$ не только не успели измениться, но и скорость их изменения в этот момент равна нулю: напряжение на этих катушках нулевое. Вся величина u приходится на катушку $3L$:

$$3L\dot{I}_3 = u = \frac{6\mathcal{E}}{11} \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_3 = \frac{2\mathcal{E}}{11L}.$$

Знак «плюс»: ток в катушке $3L$ нарастает.

Обратите внимание: «ток катушки не меняется» говорит о самом токе, а не о скорости его изменения. Нулевую скорость в L и $2L$ мы не приняли на веру, а получили из того, что ток источника не изменился (шаг 3), а значит не изменилось и u. Для катушки $3L$, наоборот, ток равен нулю, но скорость отлична от нуля.

Пункт 3

5. Качественная картина. Ток в ветке $3L$ растёт, и ток источника $I_1 + I_2 + I_3$ растёт вместе с ним, а напряжение $u = \mathcal{E} - R(I_1 + I_2 + I_3)$ убывает. Когда u станет меньше $2RI_1$, катушка L начнёт отдавать энергию, и ток I_1 убывает; то же с I_2. Так будет, пока всё не успокоится. В конце токи постоянны, напряжения на катушках нулевые, поэтому $u = 0$. Тогда $I_1 = I_2 = 0$ (напряжение на резисторах $2R$ и $3R$ нулевое), а весь ток источника течёт по ветке $3L$, у которой нет сопротивления: $I_3 = \mathcal{E}/R$. Так выглядит численное решение уравнений цепи (токи в единицах $\mathcal{E}/R$, время в единицах L/R, начальные значения I_{10}, I_{20}, 0 взяты из пунктов 1–2; график — на втором из рисунков ниже).

6. Уравнение контура для веток $2R$–L и $3L$. Заряд, протёкший через резистор, — это сумма $I_1\,dt$ за всё время. Запишем напряжение между проводами двумя способами, для ветки с $2R$ и L и для ветки с $3L$:

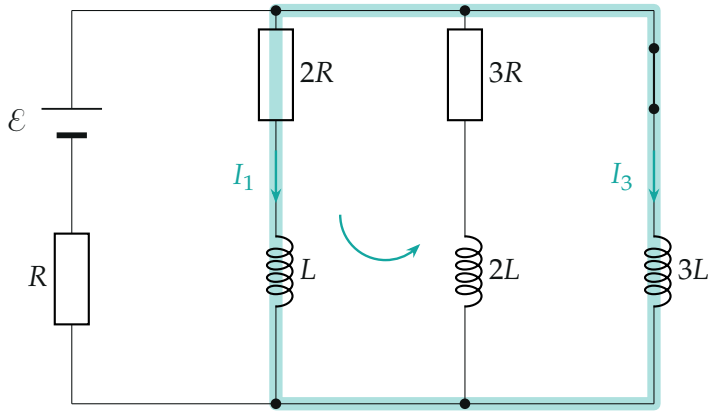
$$u = 2RI_1 + L\dot{I}_1, \qquad u = 3L\dot{I}_3.$$

Контур из этих двух веток: обходим вниз по первой, вверх по второй; источника в нём нет, поэтому сумма падений напряжения равна нулю,

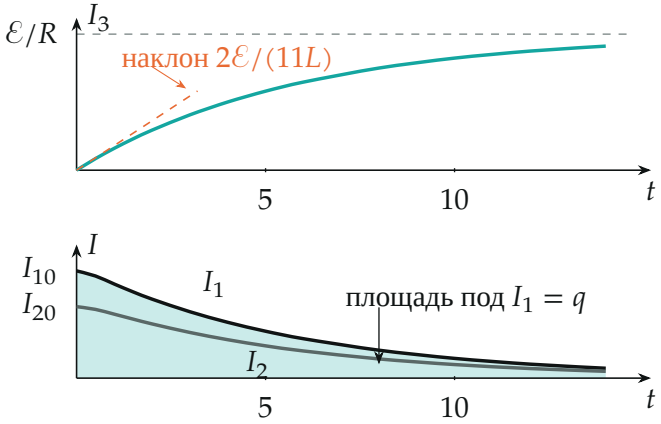
то есть $3L\,\dot{I}_3 - L\,\dot{I}_1 = 2R\,I_1$. Умножим на малый промежуток dt и просуммируем от замыкания ключа до установления режима:

$$3L\,\Delta I_3 - L\,\Delta I_1 = 2R\int I_1\,dt = 2R\,q,$$

где ΔI — изменение тока за всё время, q — заряд, протёкший через резистор $2R$.



Контур из веток $2R$–L и $3L$ (выделен). Токи I_1 и I_3 идут вниз, обход контура — против часовой стрелки.



Токи в ветках после замыкания. Вверху: ток I_3 растёт от нуля с наклоном $2\mathcal{E}/(11L)$ (касательная пунктиром) к значению $\mathcal{E}/R$. Внизу, в более крупном масштабе: токи I_1 и I_2 убывают к нулю; закрашена площадь под I_1, она равна искомому заряду.

7. Изменения токов. Ток в катушке $3L$ изменился от нуля до $\mathcal{E}/R$: $\Delta I_3 = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$. Ток в катушке L изменился от $I_{10} = \dfrac{3\mathcal{E}}{11R}$ до нуля: $\Delta I_1 = -\dfrac{3\mathcal{E}}{11R}$. Подставляем:

$$2R\,q = 3L\,\frac{\mathcal{E}}{R} + L\,\frac{3\mathcal{E}}{11R} = \frac{36L\mathcal{E}}{11R} \quad\Rightarrow\quad q = \frac{18L\mathcal{E}}{11R^2}.$$

Знак «плюс»: ток I_1 всё время течёт в одну сторону (график), так что весь заряд прошёл вниз по резистору $2R$.

Проверка. Размерность: $\mathcal{E}/R$ — ток, L/R — время, их произведение — заряд. Второй способ: система уравнений цепи $L\dot I_1 = u - 2RI_1$, $2L\dot I_2 = u - 3RI_2$, $3L\dot I_3 = u$, $u = \mathcal{E} - R(I_1+I_2+I_3)$, решённая на компьютере с начальными токами $\frac{3}{11}$, $\frac{2}{11}$, 0 (в единицах $\mathcal{E}/R$), даёт $\dot I_3(0) = \frac{2}{11} = 0{,}1818$ и $q = \int I_1\,dt \approx 1{,}635$ в единицах $L\mathcal{E}/R^2$, а $\frac{18}{11} = 1{,}636$. Смысл: заряд зависит только от начального и конечного состояний цепи и индуктивностей, а не от того, как именно шёл процесс.

Ответ. 1) $I_{10} = \dfrac{3\mathcal{E}}{11R}$; 2) $\dot I_3 = \dfrac{2\mathcal{E}}{11L}$; 3) $q = \dfrac{18L\mathcal{E}}{11R^2}$.