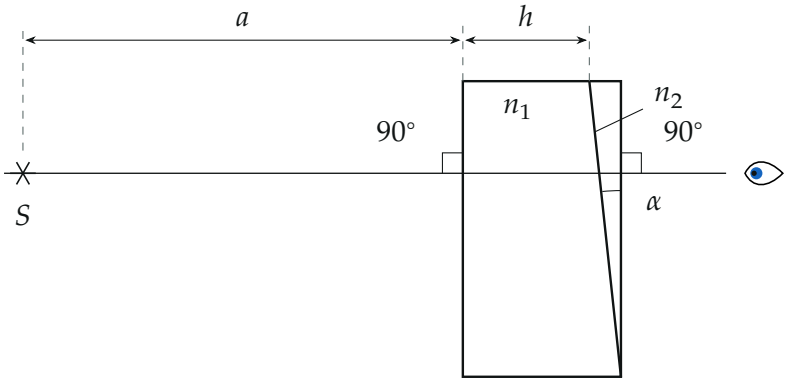
Две призмы: отклонение и смещение изображения

Задача 5. [Физтех 2022/23, 11 класс, вариант 2, варианты 11-01–11-04, задача 5] Оптическая система состоит из двух призм с показателями преломления n_1 и n_2 и находится в воздухе с показателем преломления $n_в = 1{,}0$. Точечный источник света S расположен на расстоянии $a = 194$ см от системы и рассматривается наблюдателем так, что источник и глаз наблюдателя находятся на прямой, перпендикулярной наружным поверхностям призм (см. рис.). Угол $\alpha = 0{,}1$ рад можно считать малым, толщина $h = 9$ см. Толщина призмы с показателем преломления n_2 на прямой «источник–глаз» намного меньше h. Отражения в системе не учитывать.

1. Считая $n_1 = n_в = 1{,}0$, $n_2 = 1{,}7$, найдите, на какой угол отклонится системой луч, идущий от источника перпендикулярно левой грани системы.
2. Считая $n_1 = n_в = 1{,}0$, $n_2 = 1{,}7$, найдите расстояние между источником и его изображением, которое будет видеть наблюдатель.
3. Считая $n_1 = 1{,}5$, $n_2 = 1{,}7$, найдите, на каком расстоянии от источника будет его изображение, которое увидит наблюдатель.



▲ **Решение. Что происходит.** Систему удобно разобрать на две части. Первая — тонкий клин из материала n_2 с малым углом α, вставленный

в стекло n_1: тонкая призма отклоняет любой луч (при малых углах) на один и тот же угол, не зависящий от угла падения. Вторая — плоскопараллельная пластина из n_1 толщиной h: она сдвигает изображение вдоль оси, к системе. Наблюдатель видит изображение там, где пересекаются продолжения назад лучей, дошедших до глаза. Идея в том, что отклонение клина находим из закона преломления на двух гранях (пункт 1), а потом считаем, куда сдвигается мнимое изображение (пункты 2 и 3).

Обозначения. φ — угол отклонения луча системой; β — угол преломления на наклонной грани; L_1 — расстояние между S и изображением в пункте 2; Δ и x — сдвиг изображения вдоль оси и поперёк неё в пункте 3. Все углы малы: $\sin\gamma \approx \operatorname{tg}\gamma \approx \gamma$, закон Снеллиуса $n\sin\gamma$ превращается в $n\gamma$.

Пункт 1

1. Преломление на наклонной грани. Луч идёт вдоль оси перпендикулярно левой грани, поэтому в n_1 он не преломляется. Граница клина наклонена к вертикали на α, значит, нормаль к ней повёрнута от оси на α, и угол падения равен α. Закон преломления: $n_1\alpha = n_2\beta$. Из более оптически плотной среды n_2 луч идёт ближе к нормали: он отклонился от оси на угол $\alpha - \beta$ в сторону утолщённого края клина (на рисунке — вверх).

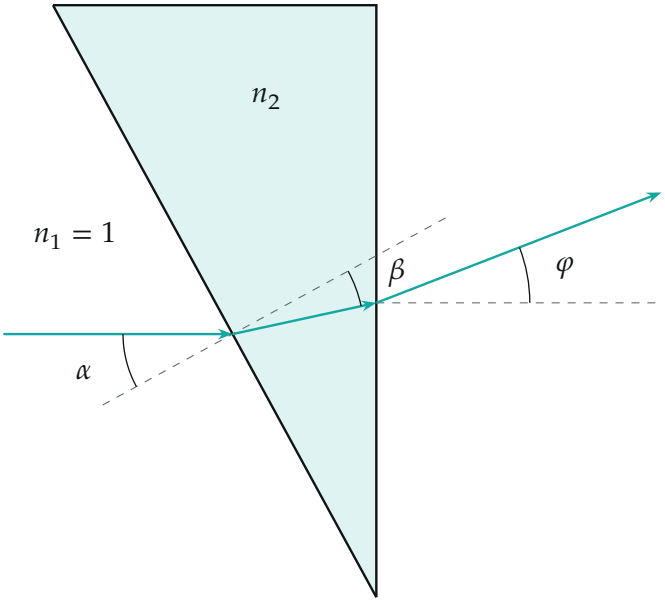
2. Преломление на правой грани. Правая грань перпендикулярна оси, поэтому угол падения на неё равен углу между лучом и осью, то есть $\alpha - \beta$. Закон преломления для выхода в воздух: $n_2(\alpha - \beta) = n_\text{в}\,\varphi$. Подставим $\beta = \dfrac{n_1}{n_2}\alpha$:

$$\varphi = \frac{n_2}{n_\text{в}}\left(\alpha - \frac{n_1}{n_2}\alpha\right) = \frac{n_2 - n_1}{n_\text{в}}\,\alpha.$$

При $n_1 = n_\text{в} = 1$ и $n_2 = 1{,}7$:

$$\varphi = (n_2 - 1)\alpha = 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}07 \text{ рад } (\approx 4^\circ).$$

Луч отклонился к утолщённому краю клина.



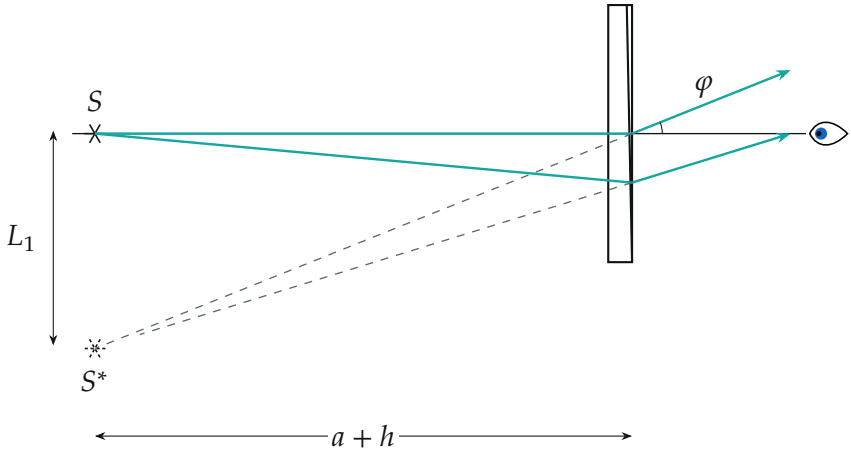
Ход луча в клине (для наглядности угол α взят около 29° вместо 0,1 рад; все углы построены по закону Снеллиуса для $n_2 = 1{,}7$). Пунктир — нормали к граням; φ — угол между вышедшим лучом и осью.

Пункт 2

3. Где изображение. Клин стоит у правой грани системы: толщина призмы n_2 на оси намного меньше h, и отклонение луча происходит на расстоянии $a + h$ от источника. Наблюдатель видит источник по направлению вышедшего луча, то есть на продолжении этого луча назад. Продолжим вышедший осевой луч назад на $a + h$: он пройдёт ниже источника на

$$L_1 = (a + h)\varphi = 203 \text{ см} \cdot 0{,}07 = 14{,}2 \text{ см} \approx 14 \text{ см}.$$

Пластины n_1 нет ($n_1 = 1$), продольного сдвига тоже нет, поэтому изображение лежит на одной вертикали с источником, на 14 см ниже, и расстояние между ними — это и есть L_1. Остальные лучи отклоняются на тот же угол φ, а значит, продолжения лучей сходятся в одной точке S^* (рисунок).



Изображение S^* лежит на продолжении вышедшего луча назад (серый пунктир) под источником на $L_1 = (a+h)\varphi \approx 14$ см. Для наглядности вертикальный масштаб увеличен примерно в 6 раз.

Пункт 3

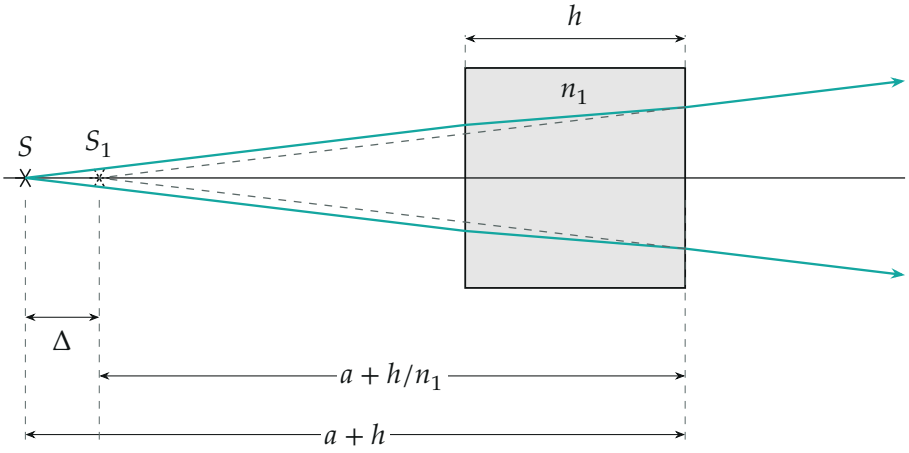
4. Пластина n_1 сдвигает изображение вдоль оси. Теперь стекло n_1 есть, и надо учесть оба действия: пластины и клина. Пластина из n_1 толщиной h (толщиной n_2 на оси пренебрегаем). Пусть луч идёт от S под малым углом θ к оси. На левой грани он поднят над осью на $a\theta$, в пластине идёт под углом θ/n_1 и на правой грани поднят на $a\theta + h\theta/n_1$, а выходит снова под углом θ. Его продолжение назад пересекает ось на расстоянии

$$\frac{a\theta + h\theta/n_1}{\theta} = a + \frac{h}{n_1}$$

от правой грани. Значит, источник кажется ближе, чем на самом деле, на

$$\Delta = (a+h) - \left(a + \frac{h}{n_1}\right) = h\left(1 - \frac{1}{n_1}\right) = 9\text{ см} \cdot \frac{1}{3} = 3\text{ см},$$

и расстояние от кажущегося источника S_1 до правой грани равно $a + h/n_1 = 194 + 6 = 200$ см. Число не зависит от угла θ, поэтому все лучи расходятся из одной точки S_1.



Пластина n_1 толщиной h: лучи из S (под малыми углами, для наглядности увеличенными) после неё идут так, будто выходят из S_1, которая ближе к пластине на $\Delta = h(1 - 1/n_1)$. Показаны расстояния от источника S и от кажущегося источника S_1 до правой грани.

5. Отклонение клина с n_1. Вывод из шагов 1 и 2 годится и для $n_1 \neq n_в$: клин n_2 внутри стекла n_1 отклоняет лучи на

$$\varphi = (n_2 - n_1)\alpha = (1{,}7 - 1{,}5) \cdot 0{,}1 = 0{,}02 \text{ рад}.$$

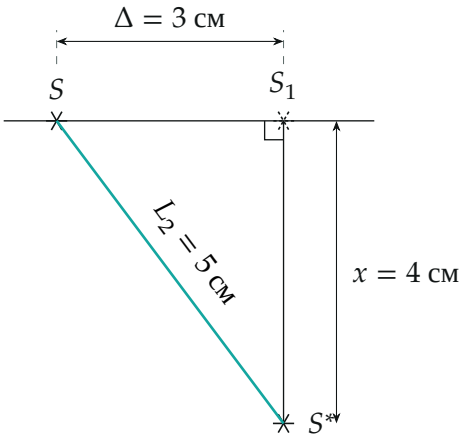
Это в три с половиной раза слабее, чем в пункте 2: разность показателей не 0,7, а 0,2.

6. Поперечный сдвиг. Лучи после пластины расходятся из S_1, которая на расстоянии 200 см от клина, и каждый из них клин отклоняет на φ. Значит, изображение сдвигается от S_1 поперёк оси к вершине клина (вниз) на

$$x = 200 \text{ см} \cdot 0{,}02 = 4 \text{ см}.$$

7. Расстояние от источника. Изображение S^* смещено относительно S на $\Delta = 3$ см вдоль оси (к системе) и на $x = 4$ см поперёк, то есть расстояние

$$L_2 = \sqrt{\Delta^2 + x^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ см}.$$



Положение изображения относительно источника (натуральный масштаб, 1 см на рисунке — 1 см): $S \to S_1$ вдоль оси на Δ, $S_1 \to S^*$ поперёк на x.

Обратите внимание: в пункте 3 клин отклоняет на $(n_2 - n_1)\alpha$, а не на $(n_2 - 1)\alpha$ — он вставлен в стекло, а не в воздух. И расстояние до изображения здесь — гипотенуза: изображение сдвинуто и поперёк, и вдоль оси.

Проверка. Размерность: угол безразмерен, L_1, Δ, x — длины. Пределы: при $n_1 = n_2$ клин и стекло оптически одинаковы, $\varphi = 0$ и $x = 0$, остаётся только продольный сдвиг Δ — так и должно быть для пластины; при $n_1 = 1$ получаем $\Delta = 0$ и пункт 2. Второй способ — численный расчёт хода лучей по точному закону Снеллиуса для $\alpha = 0{,}1$ рад: угол отклонения 0,0701 рад, расстояние в пункте 2 — 14,25 см, в пункте 3 — 4,8 см (сдвиги 2,7 и 4,0 см). Для пункта 3 приближение малых углов даёт 5 см; разница — от конечной толщины клина n_2 на оси в численном счёте: стекла n_1 на пути луча чуть меньше h, и продольный сдвиг меньше 3 см; по условию эта толщина пренебрежимо мала, и ответ — 5 см.

Ответ. 1) $\varphi = 0{,}07$ рад; 2) $L_1 \approx 14$ см; 3) $L_2 = 5$ см.