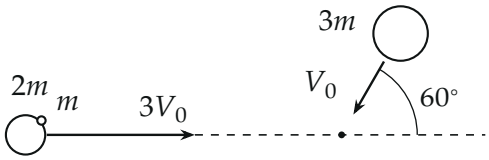
Столкновение шайб с пластилином

Задача 1. [Физтех 2022/23, 11 класс, варианты 11-05–11-08, задача 1] Две небольшие шайбы скользят по гладкой горизонтальной поверхности так, как показано на рисунке, после чего происходит их столкновение. Масса первой шайбы $2m$, скорость $3V_0$, масса второй шайбы $3m$, скорость V_0. Угол между направлениями скоростей $60°$. К первой шайбе прикреплён кусочек пластилина массы m.

1. Найдите скорость шайб, если после столкновения они приклеились друг к другу.
2. На какую величину E_0 увеличится внутренняя энергия системы после такого столкновения?
3. Известно, что произошёл такой удар, что шайбы не слиплись, а пластилин полностью прилип к правой шайбе. При этом внутренняя энергия системы увеличилась на величину $E_0/2$ (см. предыдущий пункт задачи). Найдите модуль скорости одной шайбы относительно другой после такого удара.

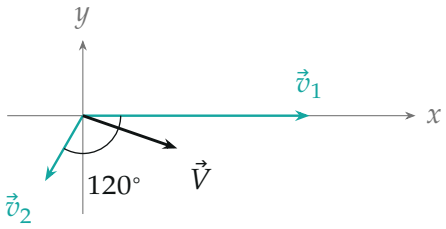
Движения шайб до и после удара поступательные. В ответах допустимы обыкновенные дроби и радикалы.



▲ **Решение. Что происходит.** Шайбы лежат на гладкой поверхности, горизонтальных внешних сил нет, поэтому импульс системы двух шайб сохраняется как вектор. Удар неупругий: часть кинетической энергии переходит во внутреннюю, механическая энергия не сохраняется, а полная энергия — сохраняется. В пункте 1 шайбы слипаются, и закон сохранения импульса сразу даёт общую скорость. В пункте 3 шайбы не слипаются, пластилин переходит с одной шайбы на другую; здесь удобна система центра масс: скорость центра масс при ударе не меняется, и

потеря кинетической энергии связана только с относительным движением шайб. Класс задачи: неупругий удар на плоскости и векторный закон сохранения импульса.

Обозначения. Пластилин прикреплён к первой шайбе, поэтому до удара её масса вместе с пластилином $3m$; вторая шайба тоже $3m$. Скорости $\vec{v}_1$ ($v_1 = 3V_0$) и $\vec{v}_2$ ($v_2 = V_0$). Дуга 60° на рисунке — между продолжением линии движения первой шайбы и линией, по которой подлетает вторая; скорость $\vec{v}_2$ направлена от второй шайбы к точке встречи, то есть против этого луча, и угол между *векторами* скоростей равен $180° - 60° = 120°$. Ось x направим вдоль $\vec{v}_1$ (тогда у первой шайбы нет проекции на ось y), ось y — перпендикулярно ей, вверх по рисунку.



Скорости шайб до удара ($v_1 = 3V_0$, $v_2 = V_0$, угол 120°) и найденная ниже общая скорость $\vec{V}$ слипшихся шайб ($V \approx 1{,}32\,V_0$); масштаб: $1V_0 = 1$ см.

Пункт 1. Скорость слипшихся шайб. Запишем закон сохранения импульса для системы «две шайбы с пластилином» за время удара (внешних горизонтальных сил нет), векторно:

$$3m\vec{v}_1 + 3m\vec{v}_2 = 6m\vec{V}.$$

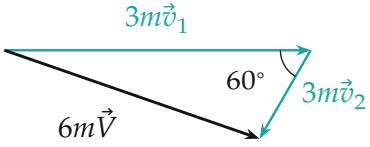
Спроецируем на оси. У второй шайбы $v_{2x} = V_0 \cos 120° = -\frac{1}{2}V_0$ и $v_{2y} = -V_0 \sin 120° = -\frac{\sqrt{3}}{2}V_0$ (вниз по рисунку):

$$V_x = \frac{3 \cdot 3V_0 - 3 \cdot \frac{1}{2}V_0}{6} = \frac{5}{4}V_0, \qquad V_y = \frac{-3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}V_0}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{4}V_0.$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = V_0\sqrt{\tfrac{25}{16} + \tfrac{3}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{2}V_0 \approx 1{,}32\,V_0.$$

Вектор $\vec{V}$ направлен под углом $\arctan(\sqrt{3}/5) \approx 19°$ ниже оси x.

Второй способ — по правилу треугольника. Импульсы $9mV_0$ и $3mV_0$ при угле 120° между векторами образуют треугольник, у которого угол между сторонами $9mV_0$ и $3mV_0$ равен 60°. Теорема косинусов даёт $(6mV)^2 = (9mV_0)^2 + (3mV_0)^2 - 2 \cdot 9 \cdot 3\, m^2V_0^2 \cos 60° = 63\, m^2V_0^2$, откуда $V = \frac{\sqrt{63}}{6}V_0 = \frac{\sqrt{7}}{2}V_0$.



Треугольник импульсов: стороны $9mV_0$, $3mV_0$ и $3\sqrt{7}\,mV_0$ (масштаб $1\,mV_0 = 0{,}45$ см).

Обратите внимание: импульсы складываются как векторы, а не как числа. Если сложить $9mV_0 + 3mV_0 = 12mV_0$, получится $V = 2V_0$ — это верно только для шайб, летящих по одной прямой в одну сторону.

Пункт 2. Внутренняя энергия E_0. Запишем закон сохранения энергии для системы: кинетическая энергия до удара равна кинетической энергии после удара плюс выделившаяся внутренняя энергия E_0 (потенциальная энергия не меняется, поверхность гладкая):

$$E_0 = \frac{1}{2}3m(3V_0)^2 + \frac{1}{2}3mV_0^2 - \frac{1}{2}6mV^2 = \left(\frac{27}{2} + \frac{3}{2} - \frac{21}{4}\right)mV_0^2 = \frac{39}{4}mV_0^2.$$

Внутренняя энергия увеличилась: из $15\,mV_0^2$ кинетической энергии осталось $\frac{21}{4}\,mV_0^2$ — энергия движения слипшихся шайб как целого.

Пункт 3. Система центра масс. Импульс системы сохраняется, поэтому скорость центра масс при ударе не меняется, и энергия его движения $\frac{1}{2}Mv_{\text{цм}}^2$ ($M = 6m$) одна и та же до и после удара. Остальная кинетическая энергия — энергия относительного движения шайб. Для двух тел масс m_a и m_b она равна $\frac{1}{2}\mu v_{\text{отн}}^2$, где $\mu = \dfrac{m_a m_b}{m_a + m_b}$ — приведённая масса,

а $v_{\text{отн}}$ — модуль скорости одной шайбы относительно другой. Действительно, в системе центра масс суммарный импульс равен нулю, шайбы летят в противоположные стороны со скоростями $u_a = \dfrac{m_b}{m_a+m_b} v_{\text{отн}}$ и $u_b = \dfrac{m_a}{m_a+m_b} v_{\text{отн}}$, и

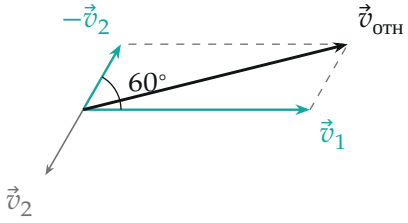
$$\frac{1}{2} m_a u_a^2 + \frac{1}{2} m_b u_b^2 = \frac{1}{2} \frac{m_a m_b}{m_a+m_b} v_{\text{отн}}^2.$$

Разность скоростей одинакова во всех системах отсчёта, поэтому $v_{\text{отн}}$ можно считать в лабораторной системе. Потеря кинетической энергии при ударе — это потеря энергии относительного движения.

До удара. Шайбы $3m$ и $3m$: $\mu_1 = \dfrac{3m \cdot 3m}{6m} = \dfrac{3}{2} m$. Относительная скорость $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$: векторы $\vec{v}_1$ и $-\vec{v}_2$ образуют угол $60°$ (параллелограмм на рисунке), и по теореме косинусов для диагонали

$$v_{1\text{отн}}^2 = (3V_0)^2 + V_0^2 + 2 \cdot 3V_0 \cdot V_0 \cos 60° = 13V_0^2.$$

Энергия относительного движения до удара $\frac{1}{2}\mu_1 v_{1\text{отн}}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m \cdot 13V_0^2 = \frac{39}{4} m V_0^2$ — ровно E_0. Это второй способ для пункта 2: слиплись шайбы — относительного движения не осталось, вся его энергия стала внутренней.



Относительная скорость шайб до удара $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$: диагональ параллелограмма на $\vec{v}_1$ и $-\vec{v}_2$; её длина $\sqrt{13}\,V_0 \approx 3{,}61\,V_0$.

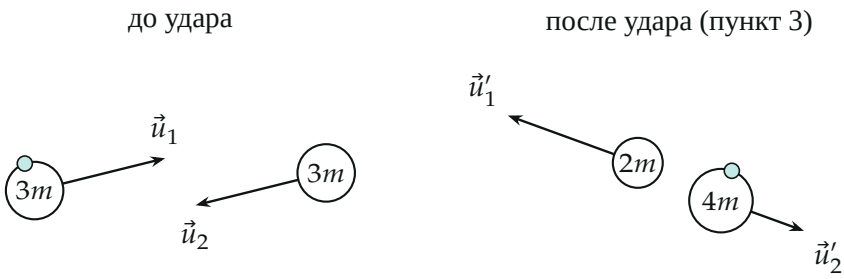
После удара. Пластилин ушёл на вторую шайбу, шайбы стали $2m$ и $3m + m = 4m$: $\mu_2 = \dfrac{2m \cdot 4m}{6m} = \dfrac{4}{3} m$. Внутренняя энергия, по условию,

выросла на $E_0/2$ относительно начального состояния, значит, энергия относительного движения упала на $E_0/2$ и стала $E_0 - E_0/2 = E_0/2$:

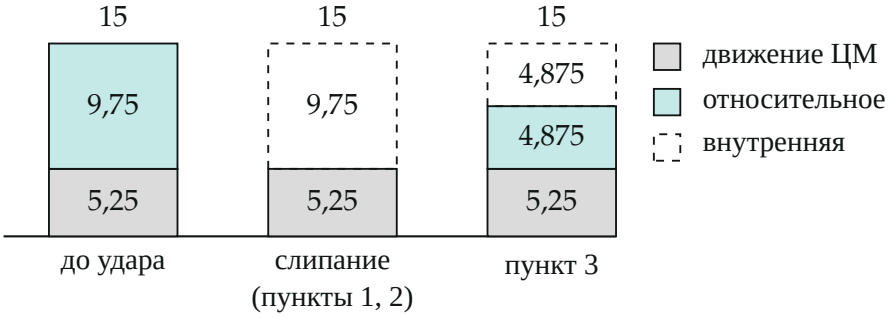
$$\frac{1}{2}\mu_2 v_{2\text{отн}}^2 = \frac{E_0}{2} \;\Rightarrow\; v_{2\text{отн}}^2 = \frac{E_0}{\mu_2} = \frac{39}{4}\cdot\frac{3}{4}V_0^2 = \frac{117}{16}V_0^2,$$

$$v_{2\text{отн}} = \frac{3\sqrt{13}}{4}V_0 \approx 2{,}70\,V_0.$$

Шайбы расходятся медленнее, чем сближались: $v_{2\text{отн}}/v_{1\text{отн}} = \frac{3}{4}$.



Система центра масс (он неподвижен; бирюзовый кружок — пластилин): до удара $u_1 = u_2 = \frac{\sqrt{13}}{2}V_0$, после — $u'_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}V_0$, $u'_2 = \frac{\sqrt{13}}{4}V_0$. Направление разлёта условием не задано.



Энергия системы в единицах mV_0^2: серое — движение центра масс, бирюзовое — относительное движение, пунктир — внутренняя энергия.

Проверка. Размерность: mV_0^2 — энергия, $v_{\text{отн}} \propto V_0$ — скорость. Пункт 2 решён двумя способами (баланс энергий и энергия относительного движения), ответы совпали. В пункте 3 энергия относительного движения после удара равна $\frac{39}{8}mV_0^2$, то есть положительна, значит шайбы разлетаются. В системе центра масс после удара шайба $2m$ имеет скорость $\frac{4}{6}v_{2\text{отн}} = \frac{\sqrt{13}}{2}V_0$, а шайба $4m$ — $\frac{2}{6}v_{2\text{отн}} = \frac{\sqrt{13}}{4}V_0$; суммарный импульс равен нулю:

$$2m \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}V_0 = 4m \cdot \frac{\sqrt{13}}{4}V_0.$$

Предел: если внутренняя энергия выросла бы на E_0 вместо $E_0/2$, относительная скорость обратилась бы в нуль — шайбы слиплись бы, как в пункте 1. Смысл: потерянная энергия — это энергия относительного движения, и чем больше её потеряно, тем медленнее шайбы расходятся.

Ответ. 1) $V = \frac{\sqrt{7}}{2}V_0$; 2) $E_0 = \frac{39}{4}mV_0^2$; 3) $v_{\text{отн}} = \frac{3\sqrt{13}}{4}V_0$.