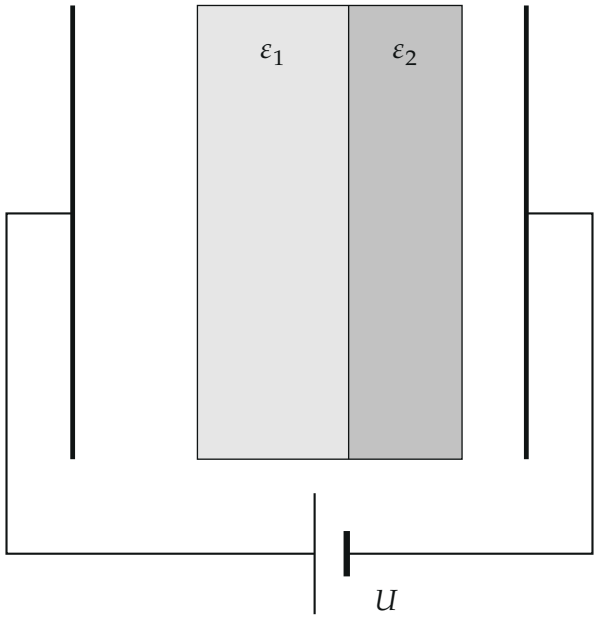
Конденсатор с двумя пластинами диэлектрика

Задача 3. [Физтех 2022/23, 11 класс, вариант 2, задача 3] В плоский конденсатор с площадью обкладок S и расстоянием между ними d помещены параллельно обкладкам и напротив них две соприкасающиеся пластины (см. рис.). У одной пластины диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_1 = 2$, толщина $d/3$, у другой пластины $\varepsilon_2 = 3$, толщина $d/4$. У обеих пластин площадь каждой из двух поверхностей равна S. Конденсатор подключён к источнику с напряжением U.

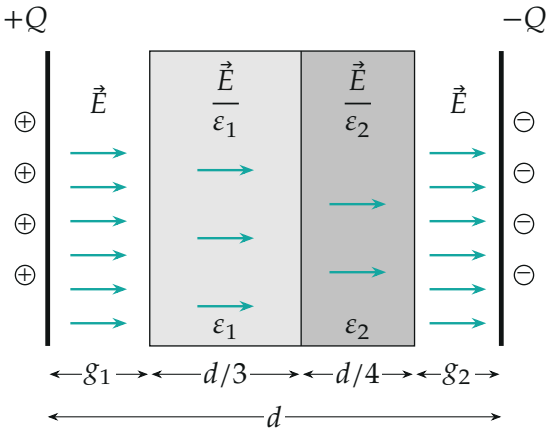
1. Найти напряжённость электрического поля E в левом воздушном зазоре конденсатора.
2. Найти заряд Q положительно заряженной обкладки конденсатора.
3. Найти связанный (поляризационный) заряд q на границе соприкосновения пластин.

Ответы давать с числовыми коэффициентами в виде обыкновенных дробей.



▲ **Решение. Что происходит.** Это плоский конденсатор со слоистой начинкой: воздух, пластина ε_1, пластина ε_2, воздух. Пластины большие, края не важны, поэтому поле в каждом слое однородное и перпендикулярно обкладкам. Идея задачи: на границах диэлектриков свободных зарядов нет, значит, число силовых линий от обкладки до обкладки не меняется — меняется только их густота: в воздухе поле E, а в диэлектрике с проницаемостью ε оно в ε раз слабее, E/ε. Напряжение — это работа поля над единичным зарядом на пути от одной обкладки к другой, поэтому оно складывается из напряжений на слоях. Связанный заряд найдём из того, как сильно диэлектрик ослабляет поле.

Обозначения. $d_1 = d/3$, $d_2 = d/4$ — толщины пластин; g_1 и g_2 — толщины воздушных зазоров слева и справа, $g_1 + g_2 = d - d_1 - d_2$. Ось x направим от положительной обкладки к отрицательной (слева направо; длинная черта значка источника означает плюс, поэтому положительна левая обкладка). E — поле в воздухе.



Свободные заряды $\pm Q$ на обкладках и поле в слоях: в воздухе E, в пластинах — в ε_1 и ε_2 раз слабее. Густота силовых линий (шесть, три, две, шесть) показывает поле.

Пункт 1

1. Поле в слоях. Поле создают свободные заряды обкладок и связанные заряды на гранях пластин. Заряженная плоскость с поверхностной

плотностью σ даёт поле $\sigma/(2\varepsilon_0)$ по обе стороны от себя. Две грани одной пластины несут равные заряды разного знака, и вне пластины их поля вычитаются до нуля. Поэтому в воздушных зазорах поле создают только обкладки, и в обоих зазорах оно одно и то же, E. Внутри пластины поле ослаблено связанными зарядами её граней: $E_{\text{пл}} = E/\varepsilon$ — так определяется диэлектрическая проницаемость. Для двух пластин

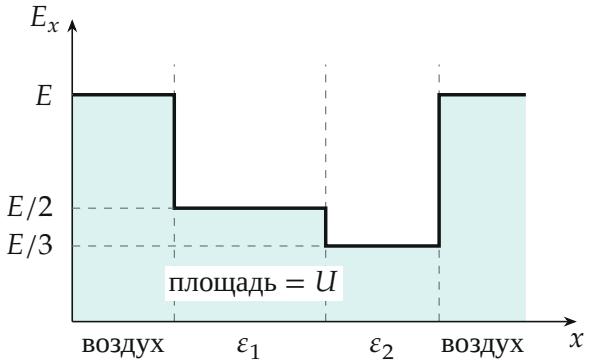
$$E_1 = \frac{E}{\varepsilon_1} = \frac{E}{2}, \qquad E_2 = \frac{E}{\varepsilon_2} = \frac{E}{3}.$$

2. Напряжение как сумма по слоям. Пройдём вдоль оси x от положительной обкладки к отрицательной. В каждом слое поле однородно, поэтому напряжение на слое — произведение поля на толщину, а напряжение на конденсаторе — сумма:

$$U = E(g_1 + g_2) + \frac{E}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{E}{\varepsilon_2} d_2 = E\left(\frac{5d}{12} + \frac{d}{6} + \frac{d}{12}\right) = E \cdot \frac{2d}{3}.$$

Здесь $g_1 + g_2 = d - \frac{d}{3} - \frac{d}{4} = \frac{5d}{12}$, $\frac{d_1}{\varepsilon_1} = \frac{d}{6}$, $\frac{d_2}{\varepsilon_2} = \frac{d}{12}$. Поэтому от разбиения воздуха на два зазора ответ не зависит. Отсюда

$$E = \frac{3U}{2d}.$$



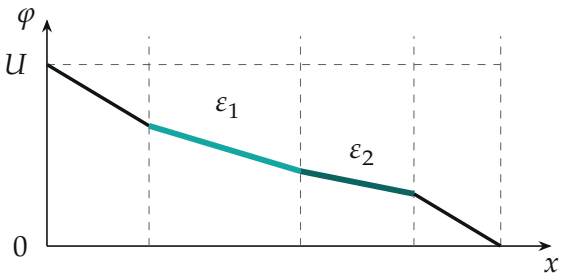
Поле вдоль оси x. Площадь под ступенчатым графиком равна работе поля над единичным зарядом, то есть напряжению U.

Пункт 2

3. Заряд обкладки. Поле в воздушном зазоре создают две обкладки с зарядами $+Q$ и $-Q$, и между ними их поля складываются:

$$E = 2 \cdot \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \quad \Rightarrow \quad Q = \varepsilon_0 SE = \frac{3\varepsilon_0 SU}{2d}.$$

Связанные заряды сюда не входят: их поля вне пластин гасят друг друга (шаг 1).



Потенциал вдоль оси x: ломаная падает от U до 0, в пластинах наклон в ε раз положе, чем в воздухе.

Пункт 3

4. Связанные заряды граней. Пластина с проницаемостью ε поляризуется вдоль поля: на грани, куда поле выходит (правая), появляется связанный заряд $+q_{\text{св}}$, на грани, куда оно входит (левая), — $-q_{\text{св}}$. Внутри пластины поле этих двух граней, $q_{\text{св}}/(\varepsilon_0 S)$, направлено против E, поэтому

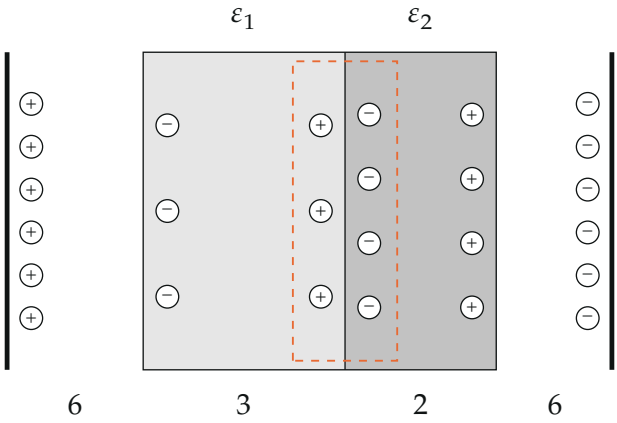
$$\frac{E}{\varepsilon} = E - \frac{q_{\text{св}}}{\varepsilon_0 S} \quad \Rightarrow \quad q_{\text{св}} = \varepsilon_0 SE\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = Q\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

Для пластин: $q_1 = \dfrac{Q}{2}$ (правая грань первой), $q_2 = \dfrac{2Q}{3}$ (модуль заряда левой грани второй).

5. Заряд на границе. На границе пластин лежат две грани: правая у первой пластины, заряд $+q_1$, и левая у второй, заряд $-q_2$. Их общий заряд

$$q = q_1 - q_2 = Q\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{Q}{6} = -\frac{\varepsilon_0 SU}{4d}.$$

Знак «минус»: на границе в целом избыток отрицательного связанного заряда, потому что вторая пластина поляризуется сильнее.



Заряды в условных единицах, $Q = 6$: связанные заряды граней — ∓ 3 у первой пластины и ∓ 4 у второй. Внизу — число силовых линий в слое: 6, затем $6-3=3$, затем $6-3+3-4=2$, справа $2+4=6$. Отношение $6:3:2$ то же, что у полей E, $E/2$, $E/3$. Пунктиром обведена граница пластин с двумя слоями связанного заряда.

6. Тот же заряд вторым способом. Плоскость с зарядом q создаёт поле $q/(2\varepsilon_0 S)$ по обе стороны от себя, направленное от неё. Проекция поля на ось x при переходе через плоскость возрастает на $q/(\varepsilon_0 S)$. На границе слева поле $E_1 = E/2$, справа $E_2 = E/3$, оба вдоль x, поэтому

$$\frac{q}{\varepsilon_0 S} = E_2 - E_1 = E\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{E}{6} \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{\varepsilon_0 SE}{6} = -\frac{Q}{6}.$$

Результат тот же. Общая формула: $q = q_1 - q_2 = Q\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - \dfrac{1}{\varepsilon_1}\right)$.

Обратите внимание: связанные заряды двух граней, которые лежат на границе вплотную, вычитаются, а не складываются. Каждая пластина в целом нейтральна, но заряд границы не равен нулю: он равен разности зарядов правой грани первой пластины и левой грани второй.

Проверка. Размерность: $\varepsilon_0 SU/d$ — это ёмкость на напряжение, то есть заряд. Предельные случаи: при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ формула даёт $q = 0$ — границы нет, поле не меняется; при $\varepsilon \to 1$ диэлектрика нет, и из $U = E\,(g_1 + g_2 + d_1 + d_2)$ получаем $E = U/d$. Ёмкость $C = Q/U = \dfrac{3\varepsilon_0 S}{2d}$: в 1,5 раза больше, чем у пустого конденсатора, и меньше, чем у конденсатора с металлическими пластинами того же размера ($\varepsilon \to \infty$: остаётся воздушный промежуток $5d/12$, ёмкость $\frac{12}{5}\,\varepsilon_0 S/d$). Смысл: диэлектрик «убирает» часть напряжения на себя, поэтому при том же U поле в воздухе выросло в 1,5 раза.

Ответ. 1) $E = \dfrac{3U}{2d}$; 2) $Q = \dfrac{3\varepsilon_0 SU}{2d}$; 3) $q = -\dfrac{\varepsilon_0 SU}{4d}$.