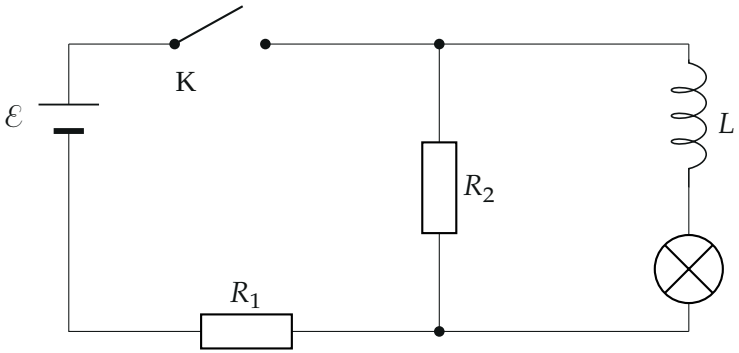
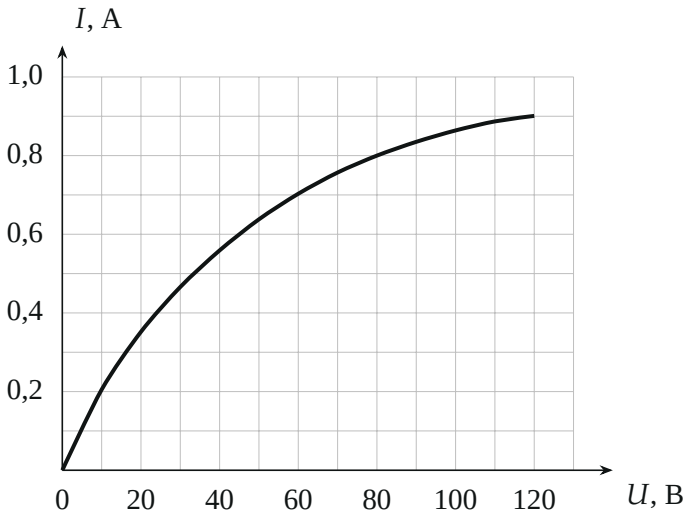
Лампочка и катушка при замыкании ключа

Задача 4. [Физтех 2022/23, 11 класс, вариант 2, задача 4] В цепи (см. рис.) катушка индуктивности и источник идеальные, $L = 0{,}4$ Гн, $\mathcal{E} = 120$ В, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 400$ Ом. Вольт-амперная характеристика лампочки накаливания приведена на рисунке. Ключ K замыкают.

1. Найти ток I_{10} через R_1 сразу после замыкания ключа.
2. Найти скорость возрастания тока через катушку сразу после замыкания ключа.
3. Найти ток через лампочку в установившемся режиме после замыкания ключа.





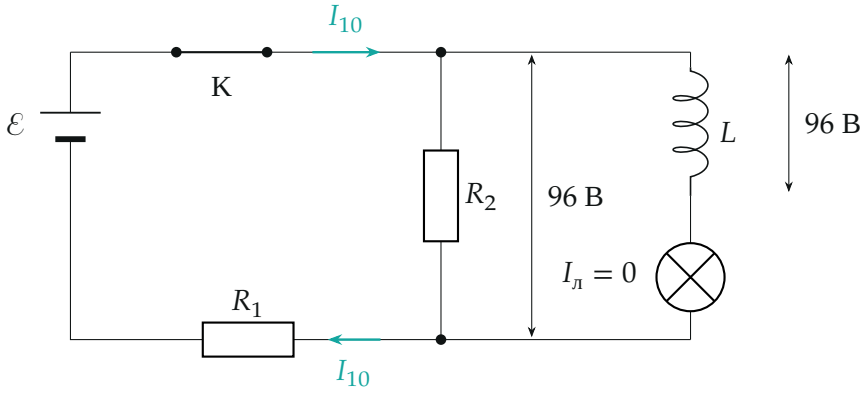
▲ **Решение. Что происходит.** Это установление тока в цепи с катушкой и нелинейным элементом. Катушка и лампа стоят в одной ветке, поэтому ток у них общий. Сразу после замыкания ключа ток катушки ещё равен нулю (катушка не пускает скачок тока), значит, и ток лампы нулевой, а по вольт-амперной характеристике нулевому току соответствует нулевое напряжение на лампе. Поэтому в первый момент цепь — это R_1 и R_2 последовательно (пункт 1), а напряжение на R_2 целиком ложится на катушку (пункт 2). Потом ток растёт, растёт и напряжение на лампе, пока напряжение на катушке не обратится в нуль: в установившемся режиме катушка — провод. Лампу формулой не описать, поэтому для установившегося режима строим на её графике нагрузочную прямую, то есть линию, которую задаёт остальная цепь (пункт 3).

Обозначения. I_{10} — ток через R_1 сразу после замыкания. I — общий ток катушки и лампы, U — напряжение на лампе. В установившемся режиме I_1 и I_2 — токи через R_1 и R_2.

Пункт 1

1. Ток сразу после замыкания. Ток катушки и лампы равен нулю, поэтому весь ток источника идёт через R_1 и R_2, соединённые последовательно. Закон Ома для этой цепи:

$$I_{10} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{120\ \text{В}}{500\ \text{Ом}} = 0{,}24\ \text{А}.$$



Сразу после замыкания ключа: в ветке «катушка и лампа» тока нет, I_{10} идёт через R_1 и R_2. На R_2 и на всей ветке справа — одно и то же напряжение 96 В; лампа с нулевым током имеет нулевое напряжение, и все 96 В приходятся на катушку.

Пункт 2

2. Напряжение на катушке. Ветка «катушка и лампа» включена параллельно R_2, поэтому напряжение на ней такое же, как на R_2:

$$U_{R_2} = I_{10}R_2 = 0{,}24\ \text{А} \cdot 400\ \text{Ом} = 96\ \text{В}.$$

Эти 96 В складываются из напряжения на катушке и напряжения на лампе. У лампы ток нулевой, а по её характеристике при $I = 0$ напряжение $U = 0$ (кривая выходит из начала координат). Значит, на катушку приходятся все 96 В.

3. Скорость нарастания тока. Идеальная катушка: напряжение на ней равно $L\dot{I}$ (ЭДС самоиндукции противоположна и уравновешивает приложенное напряжение). Поэтому

$$L\dot{I} = 96\ \text{В} \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = \frac{96\ \text{В}}{0{,}4\ \text{Гн}} = 240\ \text{А/с}.$$

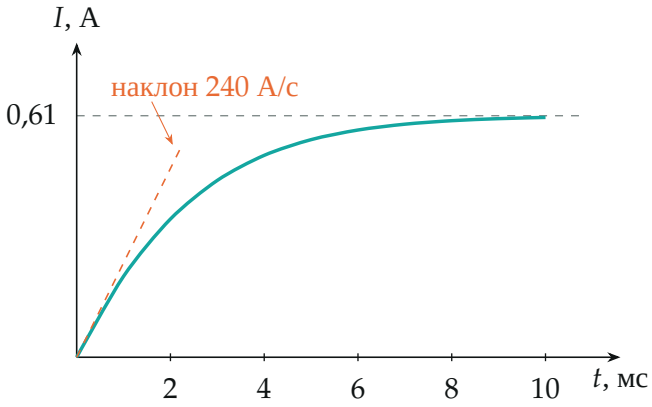
Знак «плюс»: ток катушки нарастает.

Обратите внимание: нулевой ток лампы не значит, что ветка «катушка и лампа» оборвана и напряжение на ней неопределённо. Лампа с нулевым током имеет нулевое напряжение (её график начинается в нуле), поэтому всё напряжение ветки достаётся катушке.

Пункт 3

4. Что будет дальше. Ток I растёт, а напряжение на катушке равно напряжению на R_2 минус напряжение на лампе $U(I)$. Растущий ток увеличивает падение на R_1, значит, напряжение на R_2 уменьшается; одновременно растёт $U(I)$ по характеристике. Напряжение на катушке падает, скорость роста тока уменьшается, и ток приближается к значению, при котором напряжение на катушке обращается в нуль. Это установившийся режим: ток постоянен, $L\dot{I} = 0$. Так выглядит численное решение уравнения цепи $L\dot{I} = 96 - 80I - U(I)$ с характеристикой лампы из

условия:



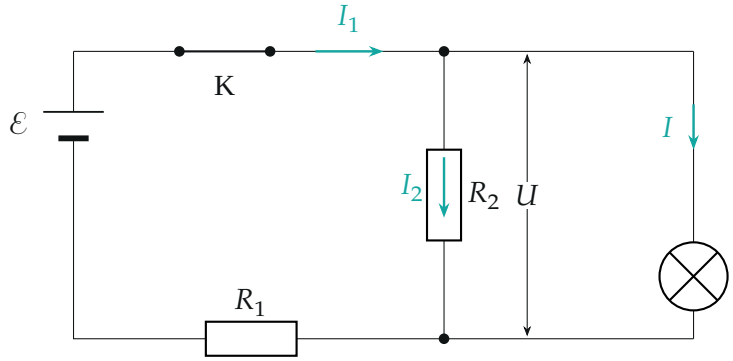
Нарастание тока катушки и лампы после замыкания: начальный наклон 240 А/с (пунктир), ток приближается к значению $\approx 0{,}61$ А за несколько миллисекунд.

5. Уравнение для установившегося режима. Катушка в таком режиме ведёт себя как провод, лампа включена параллельно R_2 и стоит на том же напряжении U. Токи резисторов: через R_2 течёт U/R_2, а через R_1 — $(\mathcal{E} - U)/R_1$, так как на R_1 падает всё остальное напряжение источника. Ток R_1 делится между лампой и R_2:

$$I + \frac{U}{R_2} = \frac{\mathcal{E} - U}{R_1}.$$

Подставим числа и умножим на 400:

$$I + \frac{U}{400} = \frac{120 - U}{100} \quad \Rightarrow \quad 400\,I + U = 480 - 4U \quad \Rightarrow \quad 80\,I = 96 - U.$$

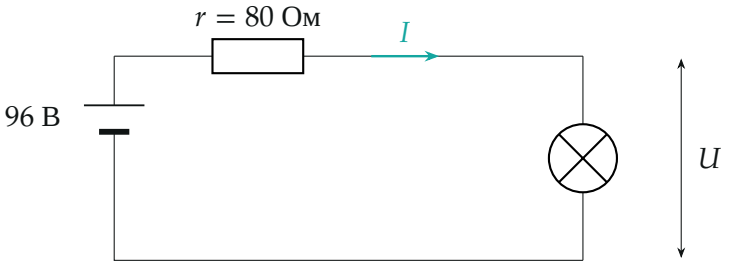


Установившийся режим: катушка заменена проводом. Ток I_1 через R_1 делится на ток лампы I и ток $I_2 = U/R_2$ через R_2; на лампе и на R_2 — одно напряжение U.

6. Нагрузочная прямая. Выражение $80\,I = 96 - U$ — это связь между током и напряжением на лампе, которую задаёт остальная цепь:

$$I = \frac{96 - U}{80}\ \text{А}, \qquad U \text{ в вольтах.}$$

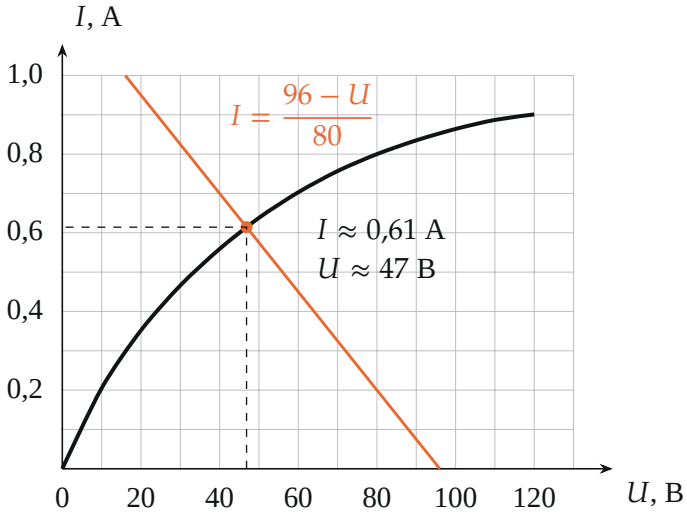
Цепь из источника и двух резисторов, если смотреть со стороны лампы, — это источник с ЭДС $\mathcal{E}_э = \mathcal{E}\,\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = 96$ В (напряжение на R_2 при отключённой лампе) и внутренним сопротивлением $r = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 80$ Ом (параллельные R_1 и R_2). Тогда $U = \mathcal{E}_э - rI$ — то же самое уравнение.



Эквивалентная схема для лампы: источник 96 В и сопротивление $r = 80$ Ом последовательно. Катушка в установившемся режиме — провод и в схему не входит.

7. Пересечение с характеристикой лампы. Лампа даёт вторую связь между I и U — свою характеристику. Установившийся режим удовлетворяет обеим, то есть лежит на пересечении. Нагрузочную прямую проводим по двум точкам: $U = 96$ В при $I = 0$ (холостой ход) и $I = 1{,}0$ А при $U = 16$ В. Прямая пересекает характеристику лампы при $U \approx 47$ В и

$$I \approx 0{,}61 \text{ А}.$$



Характеристика лампы и нагрузочная прямая $I = (96 - U)/80$. Точка пересечения — установившийся режим.

Проверка. Размерность: $\mathcal{E}/(R_1 + R_2)$ — ток; В/Гн = А/с. Пределы: если лампу закоротить ($U = 0$), ток был бы $\mathcal{E}/R_1 = 1{,}2$ А; если убрать лампу ($I = 0$), на R_2 было бы 96 В. Ответ лежит между этими крайностями. Второй способ: численно решить $L\dot{I} = 96 - 80\,I - U(I)$ (график выше): ток приходит к 0,61 А, а в начале $\dot{I} = 240$ А/с, как в пункте 2. Смысл: сначала все 96 В на катушке, потом они перераспределяются, и в установившемся режиме на катушке нуль, а на лампе около 47 В.

Ответ. 1) $I_{10} = 0{,}24$ А; 2) $\dot{I} = 240$ А/с; 3) $I \approx 0{,}61$ А (у организаторов 0,60 А, допустимо 0,58–0,62 А: точность чтения графика).