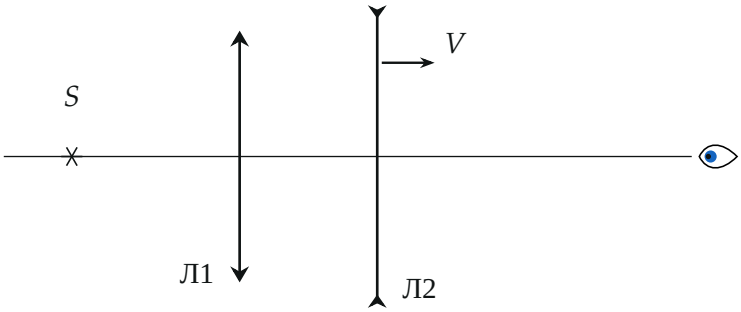
Две линзы, одна из которых движется

Задача 5. [Физтех 2022/23, 11 класс, вариант 2, задача 5] Главные оптические оси двух тонких линз совпадают. У линзы Л1 фокусное расстояние $F_1 = 10$ см, у линзы Л2 фокусное расстояние $F_2 = -20$ см. Неподвижный точечный источник света S расположен на расстоянии $d = 40$ см от неподвижной линзы Л1. Линза Л2 удаляется от Л1 с постоянной скоростью $V = 2{,}5$ см/с. Изображение источника рассматривают со стороны линзы Л2 (см. рис.).

1. На каком расстоянии x_0 от линз располагалось изображение, когда Л1 и Л2 были вплотную друг к другу?
2. На каком расстоянии x от линзы Л2 будет изображение, когда расстояние между линзами станет $L = 10$ см?
3. Найти скорость U (по модулю) изображения, когда расстояние между линзами станет $L = 10$ см.



▲ **Решение. Что происходит.** Это система из двух линз, и работает она по цепочке: изображение, которое строит Л1, служит источником для Л2. Л1 строит изображение S_1 точки S. Если Л2 стоит ближе, чем S_1, лучи падают на Л2 уже сходящимся пучком: для неё S_1 — мнимый предмет, расстояние до него в формуле линзы берём со знаком «минус». Когда линзы стоят вплотную, их оптические силы складываются. Скорость изображения найдём в системе отсчёта линзы Л2: там продольное смещение изображения в Γ^2 раз больше смещения предмета (Γ — поперечное увеличение).

Обозначения. Ось x направлена вдоль главной оси от источника к наблюдателю (вправо), начало — в линзе Л1. f_1 — расстояние от Л1 до S_1; s — расстояние от Л2 до S_1 (мнимый предмет); f_2 — расстояние от Л2 до итогового изображения S_2; по условию $x = f_2$. Формула тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$, где a — расстояние до предмета (для мнимого предмета $a < 0$), b — до изображения (для мнимого изображения $b < 0$).

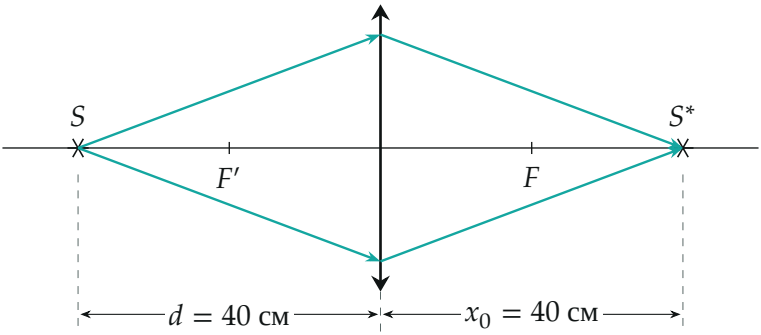
Пункт 1

1. Две линзы вплотную — одна линза. Л1 строит изображение на расстоянии f_1: $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1}$. Л2 стоит вплотную к Л1, поэтому S_1 для неё — мнимый предмет на расстоянии $-f_1$, и $\frac{1}{-f_1} + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{F_2}$. Складываем два уравнения: f_1 уходит, остаётся

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{20},$$

$$\frac{1}{x_0} = \frac{1}{20} - \frac{1}{40} = \frac{1}{40}, \qquad x_0 = 40 \text{ см}.$$

Система собирающая с $F = 20$ см, источник стоит в двойном фокусе, изображение действительное, на таком же расстоянии за линзами (рисунок).



Линзы вплотную: система с $F = 20$ см. Источник S стоит в двойном фокусе ($d = 2F$), изображение S^* — на расстоянии $x_0 = 2F = 40$ см по другую сторону.

Пункт 2

2. Изображение в Л1. Л1 даёт изображение S_1:

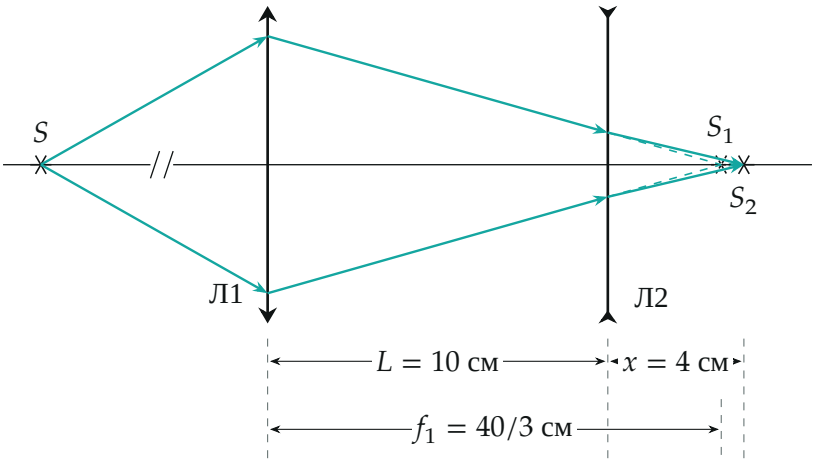
$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1} - \frac{1}{d} = \frac{1}{10} - \frac{1}{40} = \frac{3}{40} \Rightarrow f_1 = \frac{40}{3} \text{ см} \approx 13{,}3 \text{ см}.$$

Это действительное изображение справа от Л1. Л2 стоит в $L = 10$ см от Л1, то есть ближе, чем S_1; расстояние от Л2 до S_1 равно $s = f_1 - L = \frac{10}{3}$ см $\approx 3{,}3$ см (за линзой Л2). Лучи падают на Л2 уже сходясь к S_1, поэтому для Л2 это мнимый предмет.

3. Линза Л2. Формула тонкой линзы для Л2 с предметом на расстоянии $-s$:

$$\frac{1}{-s} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2} \Rightarrow \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{s} = -\frac{1}{20} + \frac{3}{10} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = f_2 = 4 \text{ см}.$$

Знак «плюс»: изображение действительное, оно за линзой Л2, на 4 см. Это дальше, чем S_1 (3,3 см): рассеивающая линза делает пучок менее сходящимся, и лучи сходятся позже.



$L = 10$ см: Л1 строит S_1 на расстоянии $40/3$ см; до S_1 лучи не доходят — Л2 перехватывает их (пунктир — их продолжение), и они сходятся в S_2 на 4 см за Л2. Слева от Л1 горизонтальный масштаб сжат (разрыв оси).

Обратите внимание: для мнимого предмета в формуле стоит отрицательное расстояние $-s$. Если подставить $+s$, получится $\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{20} - \frac{3}{10}$, то есть мнимое изображение — неверный результат.

Пункт 3

4. Что меняется с отдалением Л2. Л1 и S неподвижны, значит, S_1 стоит на месте. Л2 едет вправо со скоростью V, то есть к S_1: расстояние s уменьшается со скоростью V. В системе отсчёта Л2 предмет S_1 приближается к ней со скоростью V (движется влево), а изображение S_2 — со скоростью $\Gamma^2 V$ в ту же сторону. Чтобы получить Γ^2, возьмём малые изменения в формуле линзы $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{s}$ (для малого промежутка времени dt фокусное расстояние постоянно):

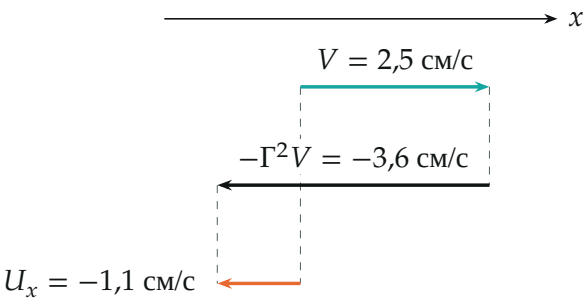
$$-\frac{df_2}{f_2^2} = -\frac{ds}{s^2} \;\Rightarrow\; df_2 = \left(\frac{f_2}{s}\right)^2 ds = \Gamma^2\, ds.$$

Поперечное увеличение Л2 здесь $\Gamma = \frac{f_2}{s} = \frac{4}{10/3} = \frac{6}{5}$, $\Gamma^2 = \frac{36}{25} = 1{,}44$. Так как $ds = -V\,dt$, в системе отсчёта Л2 изображение движется влево со скоростью $\Gamma^2 V = 1{,}44 \cdot 2{,}5 = 3{,}6$ см/с, а проекция скорости на ось x равна $-3{,}6$ см/с.

5. Переход в неподвижную систему. Проекция скорости изображения в неподвижной системе — это проекция скорости Л2 плюс относительная:

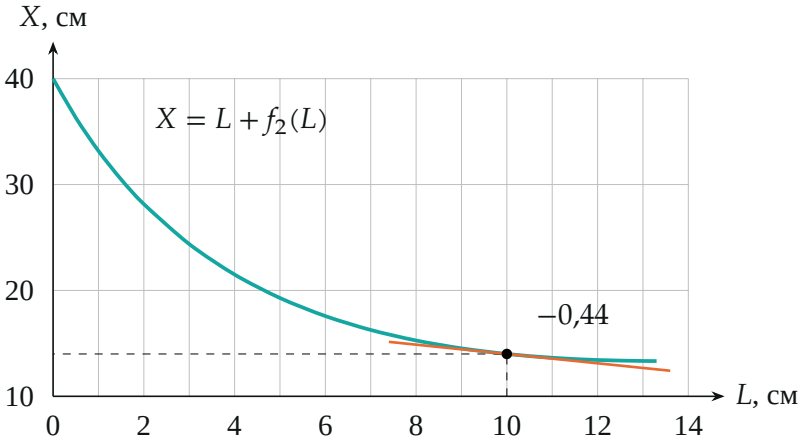
$$U_x = V + (-\Gamma^2 V) = V\,(1 - \Gamma^2) = 2{,}5 \cdot (1 - 1{,}44) = -1{,}1 \text{ см/с}.$$

Знак «минус»: изображение движется влево, то есть навстречу линзе Л2 и к источнику, по модулю $U = 1{,}1$ см/с (хотя Л2 едет вправо).



Скорости (проекции на ось x): Л2 едет вправо со скоростью V; изображение относительно Л2 — влево со скоростью $\Gamma^2 V = 3{,}6$; в неподвижной системе — влево со скоростью 1,1 см/с.

6. Тот же результат вторым способом. Положение изображения относительно Л1 — это $X(L) = L + f_2(L)$, где f_2 зависит от L через $s = f_1 - L$. Производная: $\dfrac{dX}{dL} = 1 + \dfrac{df_2}{dL} = 1 - \Gamma^2 = -0{,}44$, и $U_x = \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dX}{dL} V = -1{,}1$ см/с. На графике это наклон касательной в точке $L = 10$ см.



Положение изображения относительно Л1 в зависимости от расстояния L между линзами. В точке $L = 10$ см значение $X = 14$ см (то есть $10 + 4$), наклон касательной $-0{,}44$.

Обратите внимание: скорость изображения нельзя брать просто равной $\Gamma^2 V$ — это скорость относительно Л2, которая сама движется. Правильный итог — $V(1-\Gamma^2)$.

Проверка. Размерность: f_2 — длина, Г безразмерно, скорость — см/с. Предел: при $L \to f_1$ Л2 стоит прямо на S_1, $s \to 0$, $f_2 \to s$, $\Gamma \to 1$, и $U_x = V(1-\Gamma^2) \to 0$: изображение у самой линзы неподвижно, как и S_1. Второй способ: численно $X(10) = 14$ см и $X(10{,}01) = 13{,}9956$ см, откуда $\Delta X/\Delta L = -0{,}44$. Смысл: изображение движется медленнее линзы и навстречу ей.

Ответ. 1) $x_0 = 40$ см; 2) $x = 4$ см; 3) $U = 1{,}1$ см/с (направлена к источнику).