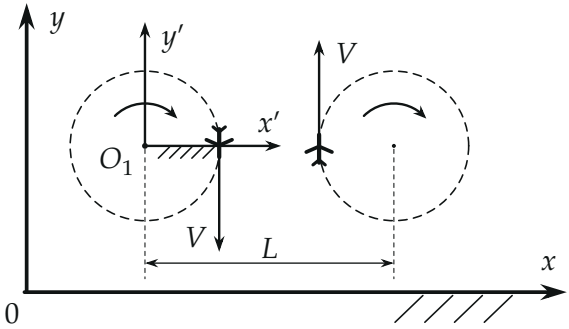
Два самолёта на окружностях

Задача 1. [Физтех 2023/24, 10 класс, варианты 10-01–10-04, задача 1] Во время выполнения пилотажного упражнения два самолёта летят в горизонтальной плоскости с одинаковыми по модулю скоростями $V = 80$ м/с (см. рис.) по окружностям одинакового радиуса $R = 800$ м. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1. На сколько δ процентов вес каждого лётчика больше силы тяжести, действующей на лётчика?

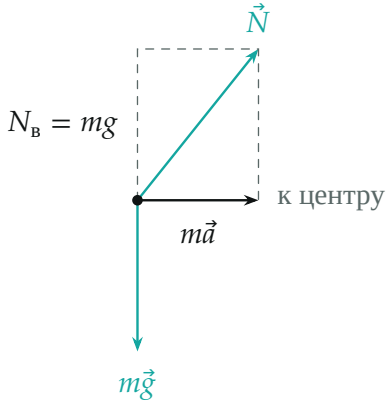
В некоторый момент времени самолёты оказались на прямой, проходящей через центры окружностей, в положении максимального сближения. Расстояние между центрами окружностей $L = 2$ км. Вектор скорости каждого самолёта показан на рисунке.

2. Найдите в этот момент скорость $\vec{U}$ второго (правого на рис.) самолёта во вращающейся системе отсчёта $x'O_1y'$, связанной с первым (левым на рис.) самолётом. В ответе укажите модуль и направление вектора $\vec{U}$.

▲ **Решение. Что происходит.** Самолёт в горизонтальном вираже летит по окружности с постоянной скоростью: его ускорение всё время направлено к центру. Лётчика к центру тянет только сила со стороны кресла, а по вертикали кресло просто держит его против тяжести, поэтому вес лётчика складывается из двух частей. Во втором пункте нужна система отсчёта, которая вращается: её ось x' всё время проходит через

первый самолёт. Главная идея — закон сложения скоростей: скорость в неподвижной системе равна скорости относительно вращающейся системы плюс скорость той точки вращающейся системы, где тело сейчас находится.

Обозначения. m — масса лётчика, $\vec{N}$ — сила, с которой самолёт действует на лётчика, ω — угловая скорость вращения системы $x'O_1y'$ вокруг центра O_1 левой окружности, $\vec{V}_{\text{пер}}$ — переносная скорость (скорость точки вращающейся системы, в которой сейчас находится второй самолёт).



Лётчик (точка) в вираже: тяжесть $m\vec{g}$ и сила кресла $\vec{N}$. Вертикальная часть $\vec{N}$ уравновешивает $m\vec{g}$, горизонтальная создаёт $m\vec{a}$ к центру. Масштаб: $mg : ma = 10 : 8$.

Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для лётчика. Лётчик движется по горизонтальной окружности с постоянной скоростью, поэтому его ускорение $a = V^2/R$ направлено горизонтально к центру. Векторно:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

В проекциях: по вертикали ускорения нет, значит вертикальная часть силы кресла равна тяжести, $N_в = mg$; по горизонтали $N_г = ma = mV^2/R$.

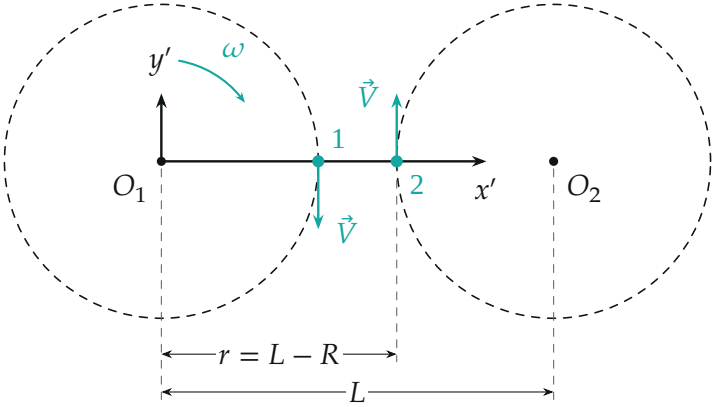
Две части перпендикулярны, поэтому

$$N = m\sqrt{g^2 + \frac{V^4}{R^2}} = mg\sqrt{1 + \left(\frac{V^2}{gR}\right)^2}.$$

2. Вес. Вес — сила, с которой лётчик действует на кресло. По третьему закону Ньютона она равна $\vec{N}$ по модулю: $P = N$. С $\dfrac{V^2}{gR} = \dfrac{6400}{8000} = 0{,}8$ получаем

$$\delta = \frac{P - mg}{mg} \cdot 100\% = \left(\sqrt{1 + 0{,}8^2} - 1\right) \cdot 100\% \approx 28\%.$$

Обратите внимание: вес — это сила кресла, а не mg. В вираже кресло давит не только вверх, но и вбок, поэтому вес больше силы тяжести, хотя самолёт летит по горизонтали.



Вид сверху в нужный момент (масштаб: 1 см = 385 м). Точки 1 и 2 — самолёты, O_1 — начало вращающейся системы, ось x' идёт вправо через самолёт 1, а система вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω.

Пункт 2.

3. Угловая скорость системы. Система $x'O_1y'$ связана с первым самолётом: ось x' всё время проходит через него. Первый самолёт обходит окружность радиуса R со скоростью V по часовой стрелке, значит

система вращается с той же угловой скоростью и в ту же сторону:

$$\omega = \frac{V}{R} = 0{,}1\ \text{с}^{-1}.$$

4. Положение второго самолёта. Второй самолёт лежит на оси x': он стоит в ближайшей к O_1 точке своей окружности, то есть на R ближе центра O_2. Расстояние от O_1 равно $r = L - R = 1200$ м.

5. Закон сложения скоростей. В лабораторной системе скорость второго самолёта $\vec{V}$. Эта скорость складывается из скорости самолёта относительно вращающейся системы $\vec{U}$ и переносной скорости $\vec{V}_{\text{пер}}$ — скорости точки системы, через которую самолёт проходит сейчас:

$$\vec{V} = \vec{U} + \vec{V}_{\text{пер}}.$$

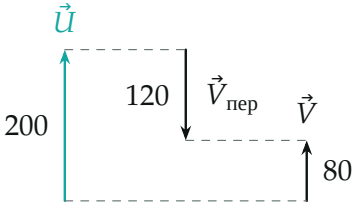
Точка системы на расстоянии r от O_1 движется по окружности радиуса r: $V_{\text{пер}} = \omega r$, направлена перпендикулярно оси x' и по часовой стрелке, то есть вниз (против y').

6. Проекции на оси. Ось y' направлена вдоль $\vec{V}$ (вверх). Проекция на y':

$$V = U_{y'} - \omega r \quad \Rightarrow \quad U_{y'} = V + \omega(L - R),$$

$$U_{y'} = \omega R + \omega(L - R) = \omega L = \frac{VL}{R} = 200\ \text{м/с}.$$

На ось x' ни $\vec{V}$, ни $\vec{V}_{\text{пер}}$ проекций не имеют, поэтому $U_{x'} = 0$. Вектор $\vec{U}$ направлен вдоль y', как и $\vec{V}$, то есть вверх на рисунке.

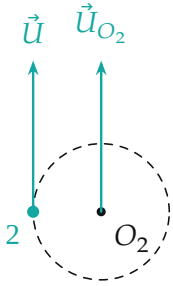


Все векторы лежат на одной прямой (сдвинуты по горизонтали, чтобы были видны); числа — модули в м/с, масштаб 1 см = 100 м/с. Цепочка: $\vec{U}$ вверх, затем $\vec{V}_{пер}$ вниз, в сумме $\vec{V}$.

Обратите внимание: $U \neq V$. Точка системы под вторым самолётом уезжает вниз на 120 м/с, а самолёт летит вверх, поэтому относительно системы он едет быстрее, чем относительно земли.

Второй способ. Второй самолёт обходит центр O_2 с той же угловой скоростью ω и в ту же сторону, в какую вращается система. Значит относительно системы он не обходит O_2, а просто едет вместе с точкой O_2 (рисунок ниже). Точка системы, в которой стоит O_2, уезжает вниз со скоростью ωL, а O_2 в лабораторной системе неподвижна, поэтому относительно системы O_2 движется вверх со скоростью ωL. Скорость самолёта относительно системы такая же:

$$U = \omega L = \frac{VL}{R} = 200 \text{ м/с}.$$



Второй способ: самолёт 2 неподвижен относительно O_2, поэтому $\vec{U} = \vec{U}_{O_2}$ (тот же масштаб).

Проверка. Размерность: VL/R — (м/с)·м/м = м/с. Предел $L = 2R$: окружности касаются, самолёты в одной точке летят навстречу, скорость второго относительно первого $2V = 160$ м/с, и формула даёт $U = 2V$. Численно: координаты самолёта 2, пересчитанные в вращающиеся оси и продифференцированные по времени, дают $U_{x'} = 0$, $U_{y'} = 200$ м/с. Смысл: относительно вращающейся системы скорость зависит и от того, как под телом «уезжает» сама система.

Ответ. 1) $\delta \approx 28\%$; 2) $U = VL/R = 200$ м/с, вектор $\vec{U}$ направлен вдоль оси y', то есть сонаправлен с $\vec{V}$.