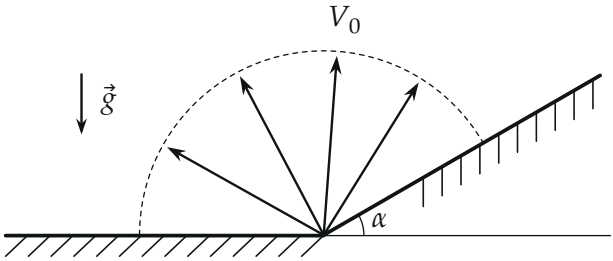
Осколки фейерверка у склона

Задача 2. [Физтех 2023/24, 10 класс, варианты 10-01–10-04, задача 2] Плоская поверхность склона образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$. У подножья склона разрывается фейерверк. Осколки летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по модулю скоростями. Наибольшая продолжительность полёта одного из осколков $T = 9$ с. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.



1. Найдите начальную скорость V_0 осколков.
2. На каком максимальном расстоянии S от точки старта упадёт осколок на склон?

▲ **Решение. Что происходит.** Все осколки стартуют из одной точки с одной скоростью V_0, но в разные стороны. Каждый — тело, брошенное под углом к горизонту, с ускорением g и без сопротивления. В первом пункте нужно направление, при котором осколок дольше всего в воздухе: время определяется только вертикальной составляющей скорости. Во втором пункте удобны оси вдоль склона и перпендикулярно ему: падение на склон — это возврат одной координаты к нулю, а вторая даёт дальность.

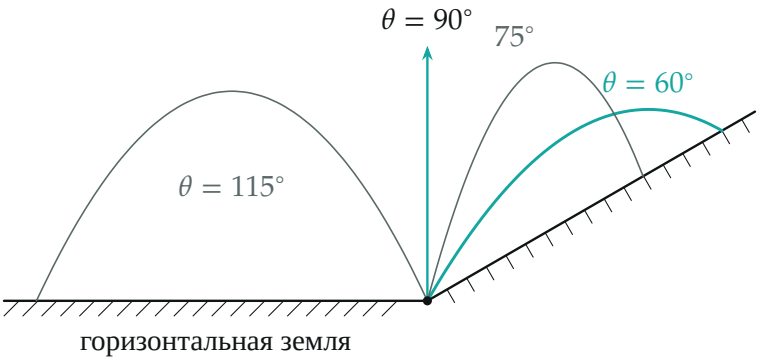
Обозначения. θ — угол между $\vec{V}_0$ и горизонтом, $\beta = \theta - \alpha$ — угол между $\vec{V}_0$ и склоном (при $\theta < \alpha$ осколок летел бы внутрь склона), $T_{\max} = 9$ с — наибольшее время полёта.

Пункт 1.

1. Время полёта. Вертикальная составляющая начальной скорости $V_0 \sin\theta$. Вверх осколок летит до остановки по вертикали и возвращает-

ся на высоту старта за время $2V_0 \sin\theta/g$, наибольшее при $\theta = 90°$. Осколок, который падает на склон, приземляется выше старта и находится в воздухе меньше. Значит, наибольшая продолжительность $T_{\max} = 2V_0/g$ у осколка, брошенного вертикально вверх, и он падает в точку старта:

$$V_0 = \frac{gT_{\max}}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ м/с}.$$

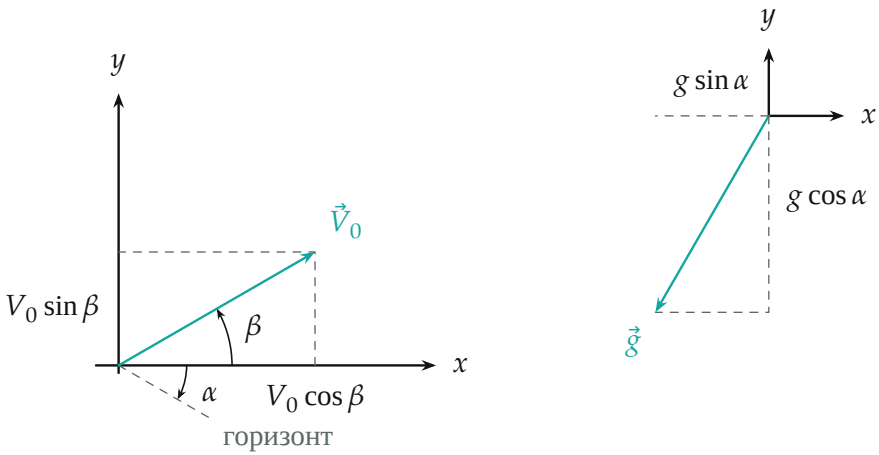


Траектории осколков в масштабе (1 см = 30 м), θ — угол между $\vec{V}_0$ и горизонтом. Время полёта: 90° — 9 с (возврат в точку старта), 115° — 8,2 с, 75° — 7,3 с, 60° — 5,2 с.

Пункт 2.

2. Оси. Ось x направим вдоль склона вверх, ось y — перпендикулярно склону. Зачем: поверхность склона — это $y = 0$, поэтому падение осколка на склон означает, что y вернулась к нулю; ускорение вдоль каждой оси постоянно.

3. Проекции. Начальная скорость: $V_{0x} = V_0 \cos\beta$, $V_{0y} = V_0 \sin\beta$. Ускорение свободного падения: $g_x = -g \sin\alpha$, $g_y = -g \cos\alpha$.



Оси: x вдоль склона вверх, y перпендикулярно склону. Слева — проекции $\vec{V}_0$ (β — угол между $\vec{V}_0$ и склоном, масштаб 1 см = 15 м/с), справа — проекции $\vec{g}$ (стрелки $g\sin\alpha$ вдоль $-x$ и $g\cos\alpha$ вдоль $-y$, масштаб 1 см ≈ 3,3 м/с^2).

4. Время полёта осколка. Движение вдоль y равноускоренное с ускорением $-g\cos\alpha$. Условие падения $y(T) = 0$:

$$V_0 \sin\beta\, T - \frac{g\cos\alpha}{2} T^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2V_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}.$$

5. Дальность вдоль склона. Вдоль x ускорение $-g\sin\alpha$, поэтому $S = x(T) = V_0\cos\beta\, T - \dfrac{g\sin\alpha}{2} T^2$. Подставим T:

$$S = \frac{2V_0^2 \sin\beta}{g\cos^2\alpha}(\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha) = \frac{V_0^2}{g\cos^2\alpha}(\sin(\alpha+2\beta) - \sin\alpha).$$

Здесь использовано $2\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+2\beta) - \sin\alpha$.

6. Наибольшая дальность. При заданных V_0 и α дальность зависит только от β и наибольшая при $\sin(\alpha+2\beta) = 1$, то есть при

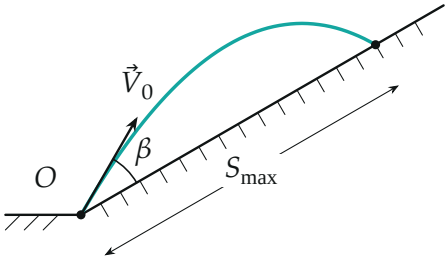
$$\alpha + 2\beta = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 30^\circ, \qquad \theta = \alpha + \beta = 60^\circ.$$

Вектор $\vec{V}_0$ лежит на биссектрисе угла между склоном и вертикалью. Так

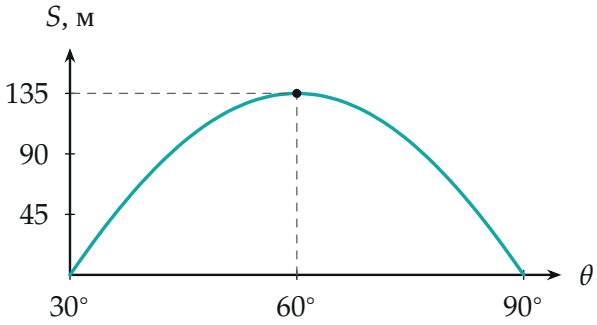
как $\cos^2\alpha = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$,

$$S_{\max} = \frac{V_0^2(1-\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha} = \frac{V_0^2}{g(1+\sin\alpha)} = \frac{45^2}{10\cdot 1{,}5} = 135 \text{ м}.$$

Обратите внимание: наибольшая дальность на склон — не при 45° к горизонту, как на ровной земле. Время такого осколка $T = \dfrac{2\cdot 45\cdot 0{,}5}{10\cdot 0{,}866} \approx 5{,}2$ с положительно, то есть осколок действительно падает на склон.



Осколок с наибольшей дальностью $S_{\max}$ (масштаб 1 см = 30 м). Вектор $\vec{V}_0$ направлен по биссектрисе угла между склоном и вертикалью: $\beta = 30°$ к склону, то есть $\theta = 60°$ к горизонту.



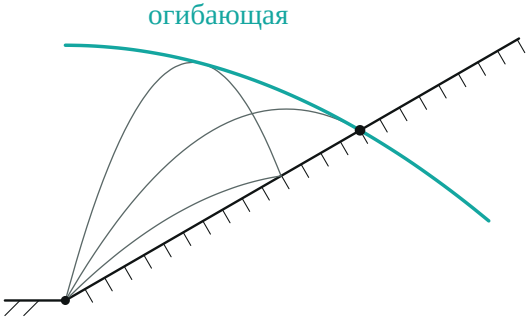
Дальность по склону в зависимости от угла θ между $\vec{V}_0$ и горизонтом, θ от $\alpha = 30°$ (вдоль склона) до 90° (вертикально). Наибольшее значение 135 м — при $\theta = 60°$.

Второй способ (парабола безопасности). Точка (x, y) достижима осколком с углом θ, если $y = x\,u - \dfrac{g x^2}{2V_0^2}(1 + u^2)$, где $u = \operatorname{tg}\theta$. Это квадратное уравнение для u, и решение существует, когда дискриминант неотрицателен:

$$y \le \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g\,x^2}{2V_0^2}.$$

Граница — огибающая всех траекторий. Склон $y = x \operatorname{tg}\alpha$ пересекает её в самой дальней точке, куда долетает осколок:

$$\frac{g}{2V_0^2}\,x^2 + x\operatorname{tg}\alpha - \frac{V_0^2}{2g} = 0 \quad\Rightarrow\quad x \approx 116{,}9\text{ м}, \qquad S = \frac{x}{\cos\alpha} \approx 135\text{ м}.$$



Парабола безопасности (бирюзовая) — огибающая всех траекторий; серые — траектории при $\theta = 45°, 60°, 75°$. Дальше всего осколок падает на склон в чёрной точке, где склон пересекает огибающую (1 см = 30 м).

Проверка. Размерность: V_0^2/g — (м/с)^2·с^2/м = м. Предел $\alpha \to 0$: $S_{\max} = V_0^2/g$ — наибольшая дальность на ровной земле при 45° (тогда $\beta = 45°$). Предел $\alpha \to 90°$ (вертикальная стена): $S_{\max} = V_0^2/(2g)$ — наибольшая высота подъёма. Численный перебор углов θ даёт максимум 135,0 м при 60°. Смысл: у наилучшего осколка перемещение $\vec{r} = \vec{V}_0 T + \vec{g}T^2/2$ вдоль склона по модулю равно $gT^2/2 = 135$ м — треугольник из этих трёх векторов равнобедренный.

Ответ. 1) $V_0 = \dfrac{gT}{2} = 45$ м/с; 2) $S = \dfrac{V_0^2}{g(1 + \sin\alpha)} = 135$ м.