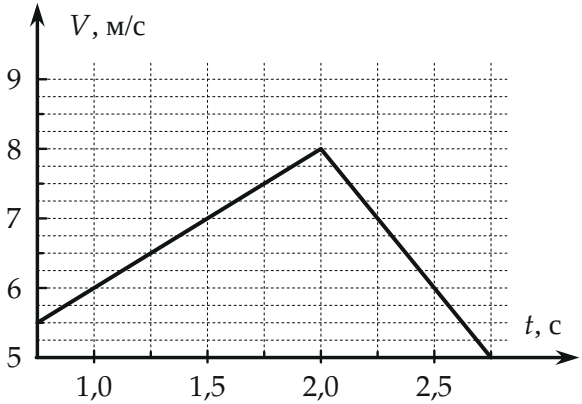
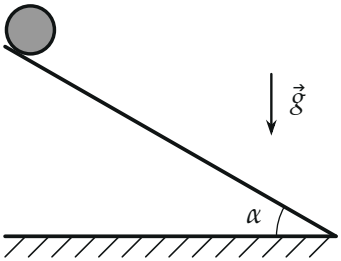
Шайба и бочка с водой на наклонной плоскости

Задача 3. [Физтех 2023/24, 10 класс, варианты 10-01–10-04, задача 3] В первом опыте на шероховатую наклонную плоскость кладут шайбу и сообщают шайбе начальную скорость. Шайба движется по плоскости, сталкивается с упором, отскакивает от него и продолжает движение по плоскости. Часть зависимости модуля скорости шайбы от времени представлена на графике к задаче. Движение шайбы происходит вдоль одной и той же прямой. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1. Найдите $\sin\alpha$, здесь α — угол, который наклонная плоскость образует с горизонтом.

Во втором опыте с той же наклонной плоскости скатывается без проскальзывания тонкостенная однородная цилиндрическая бочка, полностью заполненная водой. Начальная скорость нулевая. Масса воды равна массе бочки. Упор удалён с наклонной плоскости. Воду считайте идеальной жидкостью. Масса торцов бочки пренебрежимо мала.



2. С какой по величине скоростью V движется бочка после перемещения по вертикали на $h = 0{,}3$ м?
3. Найдите ускорение a, с которым движется бочка.
4. При каких величинах коэффициента μ трения скольжения бочка катится без проскальзывания?

▲ **Решение. Что происходит.** Шайба скользит вниз и разгоняется, у упора её скорость по модулю не меняется, затем она едет вверх и тормозит. Трение направлено против скорости, поэтому ускорение вниз по плоскости меньше $g\sin\alpha$, а вверх — больше; неизвестный коэффициент трения μ_0 уходит при сложении двух уравнений. Бочка катится без проскальзывания: трение покоя работы не совершает, потерь энергии нет, скорость находим из закона сохранения энергии, силу трения — из динамики. Идеальная вода не трётся о стенки и не вращается.

Пункт 1.

1. Ускорения по графику. Скорость растёт от 0,75 до 2,0 с (шайба скользит вниз), затем убывает до 2,75 с (после удара шайба едет вверх). Ускорение — наклон графика: $a_1 = \dfrac{8-5{,}5}{2{,}0-0{,}75} = 2$ м/с^2, $a_2 = \dfrac{8-5}{2{,}75-2{,}0} = 4$ м/с^2.

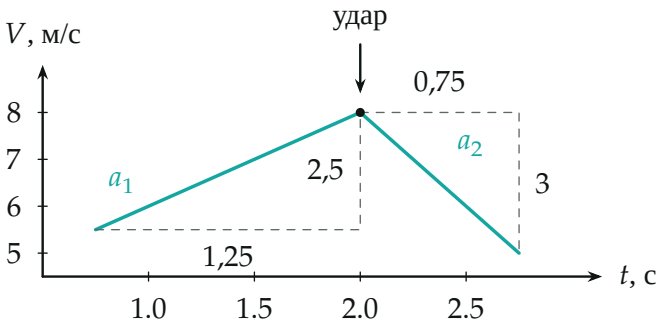


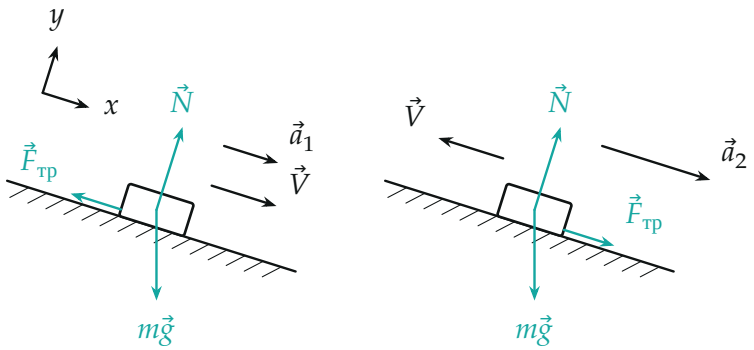
График из условия с достроенными треугольниками (числа у катетов: Δt в с по горизонтали, ΔV в м/с по вертикали). Отрезок 1: $a_1 = 2{,}5/1{,}25 = 2$ м/с^2; отрезок 2: $a_2 = 3/0{,}75 = 4$ м/с^2.

2. Второй закон Ньютона вдоль плоскости. Ось x — вниз по плоскости, обе проекции ускорения направлены вниз. При спуске трение направлено вверх, при подъёме — вниз:

$$ma_1 = mg\sin\alpha - \mu_0 mg\cos\alpha, \qquad ma_2 = mg\sin\alpha + \mu_0 mg\cos\alpha.$$

Здесь $N = mg\cos\alpha$ — из проекции на ось, перпендикулярную плоскости. Трение входит с разными знаками и при сложении уходит:

$$a_1 + a_2 = 2g\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{a_1 + a_2}{2g} = \frac{2+4}{20} = 0{,}3.$$



Силы на шайбу при спуске (слева) и при подъёме после удара (справа); ось x — вдоль плоскости вниз. Трение направлено против скорости, ускорение в обоих случаях — вниз по плоскости, $a_2 > a_1$.

Пункт 2.

3. Энергия. Система — бочка (m, радиус R) и вода ($M = m$). Нормальная сила работы не совершает; трение приложено к точке касания, неподвижной в каждый момент (нет проскальзывания), его работа равна нулю; идеальная вода потерь не даёт. Значит механическая энергия сохраняется: убыль потенциальной $(m+M)gh$ равна приращению кинетической.

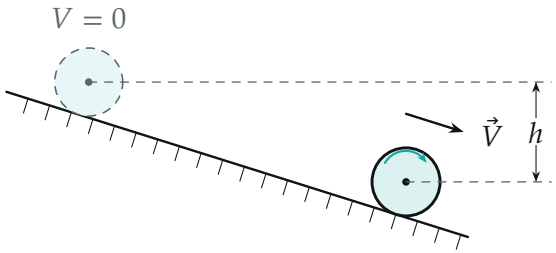
4. Кинетическая энергия. Стенка вращается с $\omega = V/R$, вся её масса

на расстоянии R от оси, торцы невесомы: $I = mR^2$. Тогда

$$E_{\text{бочки}} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mV^2.$$

Идеальная вода не передаёт стенке касательных сил, поэтому не вращается: каждая её частица движется со скоростью V, $E_{\text{воды}} = MV^2/2$. При $M = m$ закон сохранения энергии даёт

$$mV^2 + \frac{mV^2}{2} = 2mgh \quad \Rightarrow \quad V^2 = \frac{4}{3}gh, \qquad V = \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 0{,}3}{3}} = 2 \text{ м/с}.$$



Начало (штрих, скорость равна нулю) и момент после спуска на h. Бочка с водой катится без проскальзывания; $\vec{V}$ — скорость оси, ω — вращение стенки; вода внутри движется только поступательно со скоростью V.

Пункт 3.

5. Ускорение. При смещении центра на s вдоль плоскости он опускается на $h = s\sin\alpha$, и по закону сохранения энергии

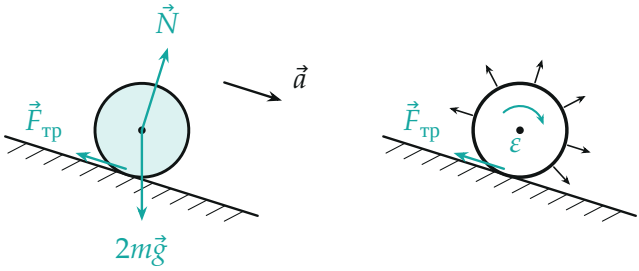
$$V^2 = \frac{4}{3}g\,s\sin\alpha = 2as \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{2}{3}g\sin\alpha = 2 \text{ м/с}^2,$$

причём $V^2 \propto s$: движение с постоянным ускорением из покоя.

6. Второй способ: динамика. Для бочки с водой вдоль оси x: $2ma = 2mg\sin\alpha - F$, перпендикулярно плоскости $N = 2mg\cos\alpha$. Вращение стенки: момент создаёт только трение, потому что N, тяжесть и давление воды проходят через ось; при качении $\varepsilon = a/R$:

$$I\varepsilon = FR \quad \Rightarrow \quad F = ma.$$

Тогда $2ma = 2mg\sin\alpha - ma$ и $a = \dfrac{2}{3}g\sin\alpha = 2$ м/с^2 — то же.



Слева — внешние силы на бочку с водой как на одно тело ($\vec{N}$ приложена в точке касания и направлена через ось). Справа — стенка: давление воды проходит через ось, вращает стенку (угловое ускорение ε) только трение, его стрелка увеличена.

Пункт 4.

7. Условие качения. Сила трения покоя из шага 6 равна $F = ma = \frac{2}{3}mg\sin\alpha$, а $N = 2mg\cos\alpha$. Трение покоя может быть любым, но не больше μN, поэтому

$$F \le \mu N \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{F}{N} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{3} = \frac{0{,}3}{3\sqrt{1-0{,}09}} \approx 0{,}105 \approx 0{,}1.$$

Обратите внимание: $F = \mu N$ верно только при проскальзывании. При качении F определяется движением (шаг 6), а μ лишь должен допустить такую силу.

Проверка. Для массы воды $M = nm$ те же шаги дают $V^2 = \dfrac{1+n}{1+n/2}gh$, $a = \dfrac{1+n}{2+n}g\sin\alpha$, $\mu \ge \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2+n}$. Пустая бочка ($n = 0$) — тонкое кольцо: $a = \frac{1}{2}g\sin\alpha$, $\mu \ge \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; при $n \to \infty$ $a \to g\sin\alpha$, $\mu \to 0$: почти вся масса не вращается, и бочка движется как тело без трения. Для шайбы $\mu_0 = (a_2 - a_1)/(2g\cos\alpha) \approx 0{,}105$ — та же граница, что в пункте 4. Смысл: вода не вращается, раскручивать приходится только стенку, поэтому бочка с водой разгоняется быстрее пустой.

Ответ. 1) $\sin\alpha = 0{,}3$; 2) $V = 2$ м/с; 3) $a = \frac{2}{3}g\sin\alpha = 2$ м/с^2; 4) $\mu \ge \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}1$.