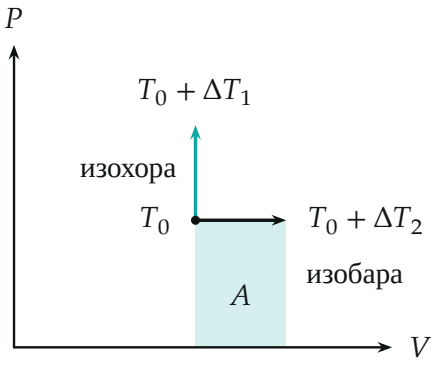
Смесь гелия и кислорода

Задача 4. [Физтех 2023/24, 10 класс, варианты 10-01–10-04, задача 4] В изохорическом процессе к смеси идеальных газов гелия и кислорода подводят $Q = 600$ Дж теплоты. Температура смеси увеличивается на $\Delta T_1 = 15$ К. Если к той же смеси подвести то же самое количество теплоты в изобарическом процессе, то температура смеси повысится на $\Delta T_2 = 10$ К.

1. Найдите работу A смеси газов в изобарическом процессе.
2. Найдите теплоёмкость C_V смеси в изохорическом процессе.
3. Найдите отношение $N_\Г/N_\К$ числа атомов гелия к числу молекул кислорода в смеси.

Указание: внутренняя энергия двухатомного газа кислорода $U = \frac{5}{2}PV$.

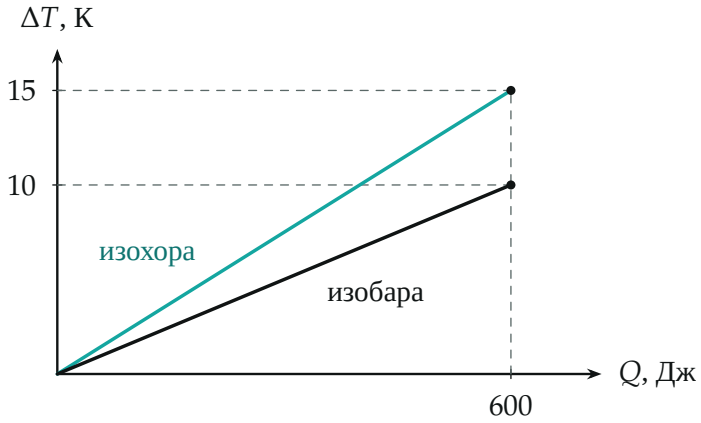


Поясняющий рисунок (не в масштабе): два процесса из одного состояния на диаграмме (V, P). Закрашено — работа газа в изобарическом процессе.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Одно и то же количество теплоты Q в двух процессах расходуется по-разному. В изохорическом объём не меняется, работы нет, и вся теплота идёт на нагревание. В изобарическом газ ещё и расширяется: часть теплоты уходит на работу, и температура растёт меньше. Главная идея: внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, поэтому $\Delta U = C_V \Delta T$ в любом процессе,

а не только в изохорическом. Это связывает два опыта. Класс задачи: теплоёмкости идеального газа и смеси.

Обозначения. $\nu_\Г$ и $\nu_\К$ — числа молей гелия и кислорода, $\nu = \nu_\Г + \nu_\К$. Внутренняя энергия смеси — сумма энергий компонентов: $U = \frac{3}{2}\nu_\Г RT + \frac{5}{2}\nu_\К RT$ (для кислорода указание $U = \frac{5}{2}PV = \frac{5}{2}\nu_\К RT$). Индекс 1 — изохорический процесс, индекс 2 — изобарический.



Нагревание при подводе теплоты Q: наклон прямой равен $1/C$. Изохора круче изобары, потому что $C_V < C_P$.

Пункты 2 и 1. Начнём с изохорического процесса: он даёт C_V (пункт 2), а по нему найдём работу в изобарическом (пункт 1).

1. Изохорический процесс. Объём не меняется, работа газа равна нулю. Первое начало термодинамики для газа: $Q = \Delta U_1 + A_1$, $A_1 = 0$, поэтому $Q = \Delta U_1 = C_V \Delta T_1$. Отсюда

$$C_V = \frac{Q}{\Delta T_1} = \frac{600}{15} = 40 \text{ Дж/К}.$$

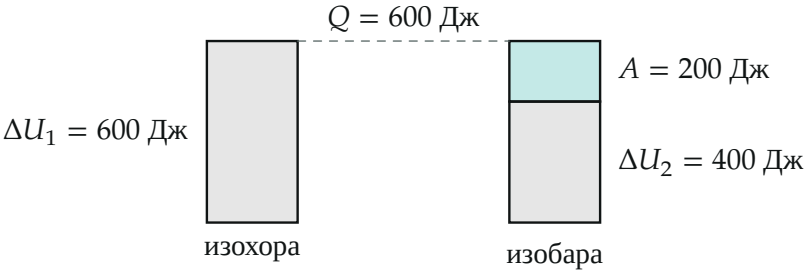
Величина C_V — свойство смеси, она одна и та же при любом процессе нагревания. Теплоёмкость в изобарическом процессе обозначим $C_P = Q/\Delta T_2 = 60$ Дж/К.

2. Изобарический процесс. Приращение внутренней энергии идеального газа зависит только от изменения температуры: $\Delta U_2 =$

$C_V\Delta T_2 = 40 \cdot 10 = 400$ Дж. Первое начало термодинамики для газа: $Q = \Delta U_2 + A$, откуда

$$A = Q - C_V\Delta T_2 = Q\Big(1 - \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\Big) = 600 - 400 = 200 \text{ Дж}.$$

Обратите внимание: ΔU_2 нельзя считать равным Q — здесь газ ещё и работает. Но ΔU_2 по-прежнему равно $C_V\Delta T_2$: энергия идеального газа не знает, каким путём его нагрели.



Куда уходит одна и та же теплота Q: в изохорическом процессе вся на нагревание, в изобарическом — 400 Дж на нагревание и 200 Дж на работу.

Пункт 3.

3. Связь теплоёмкостей через число молей. Работа газа при постоянном давлении $A = P\Delta V = \nu R\Delta T_2$ (уравнение Менделеева — Клапейрона $P\Delta V = \nu R\Delta T$ при $P = \text{const}$). Подставим найденное $A = 200$ Дж и $\Delta T_2 = 10$ К:

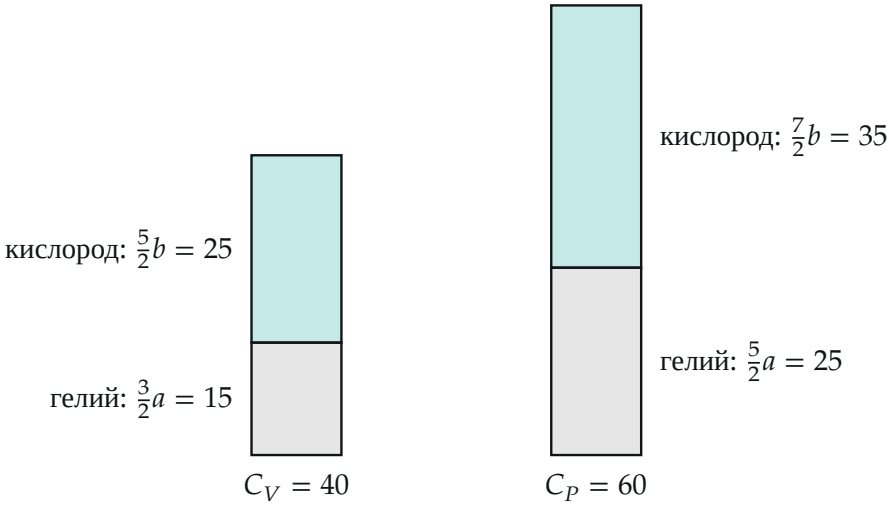
$$\nu R = \frac{A}{\Delta T_2} = 20 \text{ Дж/К}, \qquad \text{то есть} \qquad C_P - C_V = \nu R = 20 \text{ Дж/К}$$

(формула Майера для смеси; $60 - 40 = 20$, всё согласовано).

4. Теплоёмкость как сумма вкладов. Обозначим $a = \nu_\Gamma R$ и $b = \nu_\text{К} R$. По указанию $C_V = \dfrac{dU}{dT} = \frac{3}{2}a + \frac{5}{2}b$. Получаем систему

$$a + b = 20, \qquad \tfrac{3}{2}a + \tfrac{5}{2}b = 40.$$

Умножим первое уравнение на $\frac{3}{2}$ и вычтем из второго: $b = 40 - 30 = 10$ Дж/К, и тогда $a = 10$ Дж/К. Значит $\nu_\Г = \nu_\К$.



Теплоёмкости смеси в Дж/К по вкладам газов (высота пропорциональна значению): при постоянном давлении каждый компонент получает добавку νR.

5. Отношение числа частиц. Гелий одноатомный, поэтому число его атомов $N_\Г = \nu_\Г N_A$; кислород двухатомный, число его молекул $N_\К = \nu_\К N_A$. Отношение частиц равно отношению молей:

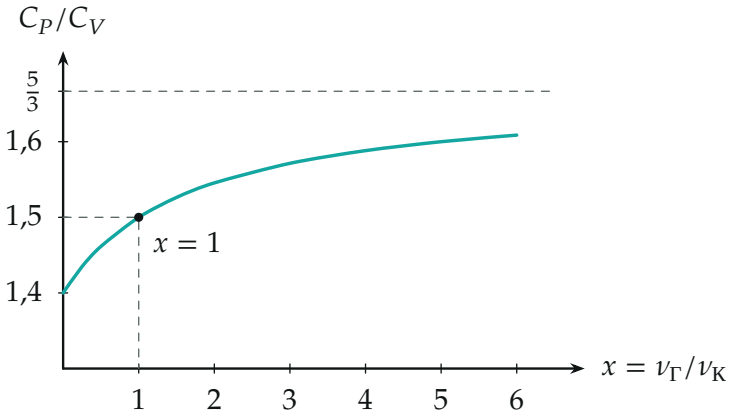
$$\frac{N_\Г}{N_\К} = \frac{\nu_\Г}{\nu_\К} = \frac{a}{b} = 1.$$

Обратите внимание: в вопросе стоят атомы гелия и именно *молекулы* кислорода. Если бы считали атомы кислорода, получилось бы $\frac{1}{2}$.

Проверка. Второй способ для пункта 3: через отношение теплоёмкостей $\frac{C_P}{C_V} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{3}{2}$. Для смеси с $x = \nu_\Г/\nu_\К$ имеем $C_V = (\frac{3}{2}x + \frac{5}{2})R\nu_\К$, $C_P = (\frac{5}{2}x + \frac{7}{2})R\nu_\К$, и

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{5x+7}{3x+5} = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; 10x + 14 = 9x + 15 \;\Rightarrow\; x = 1.$$

Ответ тот же. Предел: чистый кислород ($x = 0$) даёт $C_P/C_V = \frac{7}{5} = 1{,}4$, чистый гелий ($x \to \infty$) — $\frac{5}{3} \approx 1{,}67$; наше 1,5 лежит между ними, как и должно быть для смеси.



Отношение C_P/C_V смеси в зависимости от состава (ось C_P/C_V начинается с 1,3). Условие $C_P/C_V = 1{,}5$ выполняется при $x = 1$.

Смысл: по двум опытам с одним и тем же количеством теплоты узнали и состав смеси — гелия и кислорода поровну, и работу расширения, и теплоёмкость.

Ответ. 1) $A = 200$ Дж; 2) $C_V = 40$ Дж/К; 3) $N_\Gamma/N_K = 1$.