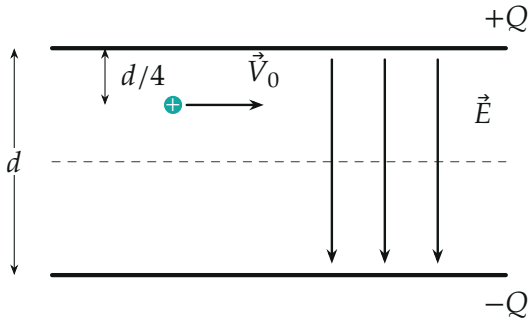
Частица в плоском конденсаторе

Задача 5. [Физтех 2023/24, 10 класс, варианты 10-01–10-04, задача 5] Частица с удельным зарядом $\gamma = q/m > 0$ движется между обкладками плоского конденсатора. Заряды обкладок конденсатора $Q > 0$ и $-Q$, ёмкость конденсатора C, расстояние между обкладками d. В некоторый момент частица движется параллельно обкладкам со скоростью V_0 на расстоянии $d/4$ от положительно заряженной обкладки.

1. Найдите радиус R кривизны траектории в этот момент времени.

Через некоторое время после вылета из конденсатора частица пересекает серединную плоскость конденсатора (плоскость, равноудалённую от обкладок).

2. С какой по величине скоростью V движется в этот момент частица?



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): конденсатор, частица в заданный момент, серединная плоскость (пунктир). Положительная обкладка сверху, поле $\vec{E}$ направлено вниз.

▲ **Решение. Что происходит.** Между обкладками поле однородное, поэтому на частицу действует постоянная сила, направленная вдоль поля, то есть перпендикулярно обкладкам. В заданный момент скорость параллельна обкладкам, значит, перпендикулярна силе, и всё ускорение «поворачивает» скорость — это нормальное ускорение; через него и выражается радиус кривизны. Второй вопрос про момент, когда частица

уже вылетела: там поле неоднородное, траектория сложная, но она и не нужна. Электрическая сила потенциальна, поэтому работает закон сохранения энергии, а серединная плоскость — эквипотенциаль с потенциалом нуль. Класс задачи: движение заряда в однородном поле + энергия в электростатическом поле.

Обозначения. $U = Q/C$ — напряжение на конденсаторе, E — напряжённость поля между обкладками, a — ускорение частицы. Размеры обкладок много больше d, поле между ними считаем однородным, силой тяжести пренебрегаем. Индекс 1 — заданный момент, индекс 2 — пересечение серединной плоскости.

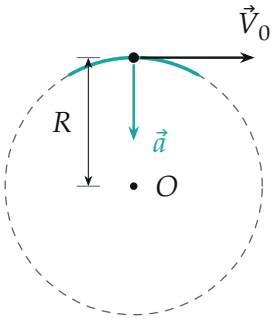
Пункт 1.

1. Поле между обкладками. Однородное поле: $E = U/d$, где $U = Q/C$. Направлено от положительной обкладки к отрицательной.

2. Ускорение. Второй закон Ньютона для частицы: $m\vec{a} = q\vec{E}$. Заряд положителен, поэтому $\vec{a} \parallel \vec{E}$ (к отрицательной обкладке). Модуль:

$$a = \frac{qE}{m} = \gamma E = \frac{\gamma U}{d} = \frac{\gamma Q}{Cd}.$$

Применимо в любой точке между обкладками, ускорение там одно и то же.



Окружность кривизны в заданный момент (O — её центр): скорость $\vec{V}_0$ — по касательной, ускорение $\vec{a}$ — к центру, то есть вдоль радиуса. Рисунок не в масштабе.

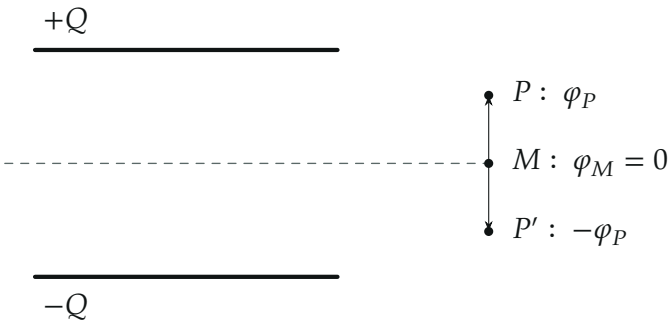
3. Радиус кривизны. Малый участок траектории можно заменить дугой окружности радиуса R — окружности кривизны. Ускорение, поворачивающее скорость, направлено к центру этой окружности и равно V^2/R. В заданный момент $\vec{a} \perp \vec{V}_0$, поэтому составляющей ускорения вдоль скорости нет: всё ускорение нормальное, $a_n = a$:

$$\frac{V_0^2}{R} = a = \frac{\gamma Q}{Cd} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{V_0^2\, dC}{\gamma Q}.$$

Обратите внимание: R — радиус окружности, которая в этот момент касается траектории, а не расстояние до пластины и не длина пути. Позже скорость и ускорение перестанут быть перпендикулярными, и R изменится.

Пункт 2.

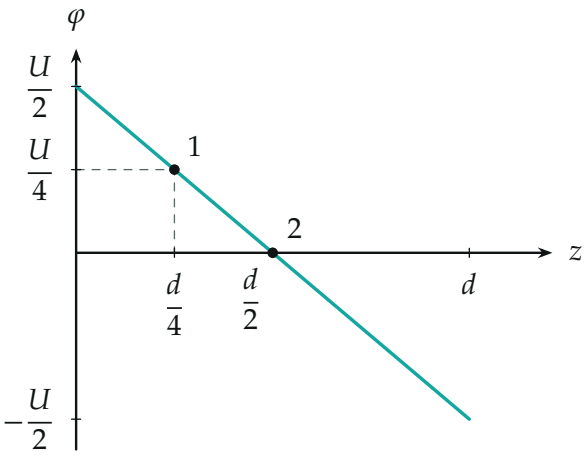
4. Потенциал серединной плоскости. Траектория после вылета из конденсатора зависит от краевых полей, но энергия от неё не зависит — нужен только потенциал точек. Выберем нуль потенциала на бесконечности. Отражение в серединной плоскости переводит заряд $+Q$ на обкладке в $-Q$ и наоборот, а потенциал при такой замене меняет знак: $\varphi(P') = -\varphi(P)$ для зеркальных точек. Точка серединной плоскости совпадает со своим отражением, поэтому там $\varphi = 0$ — и внутри конденсатора, и вне его.



Зеркальные относительно серединной плоскости точки P и P': потенциалы равны по модулю и противоположны по знаку; на самой плоскости (точка M) потенциал нулевой.

Внутри конденсатора потенциал линейно зависит от расстояния вдоль поля. Расстояние от серединной плоскости до частицы $d/2 - d/4 = d/4$, в сторону положительной обкладки, поэтому

$$\varphi_1 = E \cdot \frac{d}{4} = \frac{U}{4}, \qquad \varphi_2 = 0.$$



Потенциал между обкладками: z — расстояние от положительной обкладки вдоль поля. Точка 1 — заданный момент, точка 2 — на серединной плоскости.

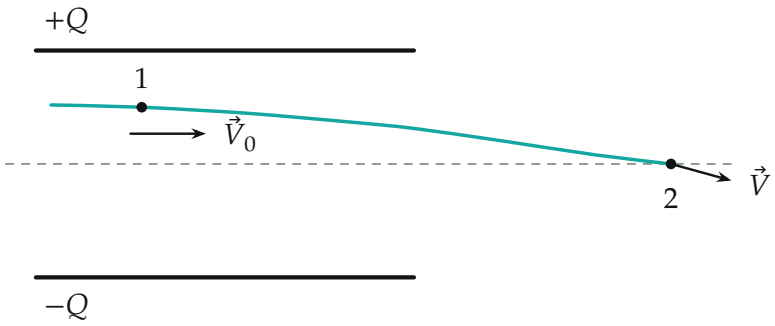
5. Закон сохранения энергии. Электрическая сила потенциальна, других сил нет, поэтому сумма кинетической и потенциальной энергий частицы сохраняется между моментами 1 и 2:

$$\frac{mV_0^2}{2} + q\varphi_1 = \frac{mV^2}{2} + q\varphi_2.$$

Подставим потенциалы и разделим на $m/2$:

$$V_0^2 + \frac{\gamma U}{2} = V^2 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}\gamma U}, \qquad U = \frac{Q}{C}.$$

Знак: положительная частица «спускается» с потенциала $U/4$ на нуль, потенциальная энергия переходит в кинетическую, поэтому $V > V_0$.



Траектория схематично: частица вылетает из конденсатора выше серединной плоскости и пересекает её уже вне конденсатора. Между точками 1 и 2 важна только разность потенциалов.

Проверка. Размерность: γU — (Кл/кг)·В = Дж/кг = м^2/с^2, как V_0^2. Предел $\gamma \to 0$ (нет заряда): $V \to V_0$, $R \to \infty$ — частица летит прямо. Второй способ для V: если бы пластины были длинными и частица дошла до серединной плоскости внутри конденсатора, то работа однородного поля на пути $d/4$ вдоль силы равнялась бы $qE\,d/4 = qU/4$, и теорема о кинетической энергии даёт то же $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \frac{qU}{4}$. Выход из конденсатора ответ не меняет, потому что потенциал серединной плоскости везде нулевой. Смысл: скорость определяется только тем, с какого потенциала на какой перешла частица, а не тем, по какому пути.

Ответ. 1) $R = \dfrac{V_0^2\,dC}{\gamma Q}$; 2) $V = \sqrt{V_0^2 + \dfrac{1}{2}\gamma U} = \sqrt{V_0^2 + \dfrac{\gamma Q}{2C}}$.