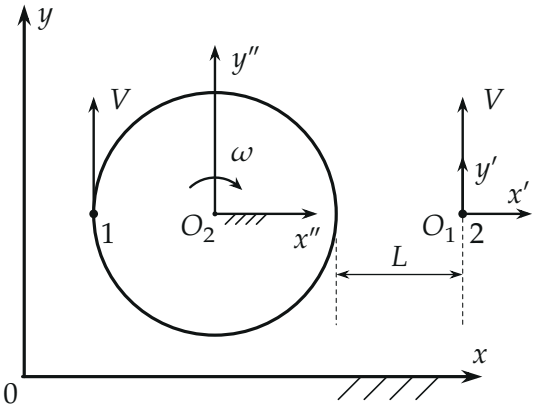
Школьники на карусели и велосипеде

Задача 1. [Физтех 2023/24, 10 класс, варианты 10-05–10-06, задача 1] Два школьника опытным путём изучают механику: первый сидит на краю равномерно вращающейся с круговой частотой $\omega = 1$ с$^{-1}$ карусели, второй едет по прямой на велосипеде (см. рис.) и оба наблюдают друг за другом. В лабораторной системе отсчёта скорости школьников одинаковы по модулю и равны $V = 3$ м/с. Все движения происходят в одной горизонтальной плоскости. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1. На сколько δ процентов вес второго школьника меньше веса первого школьника? Указание: считайте, что $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ при $x \ll 1$.

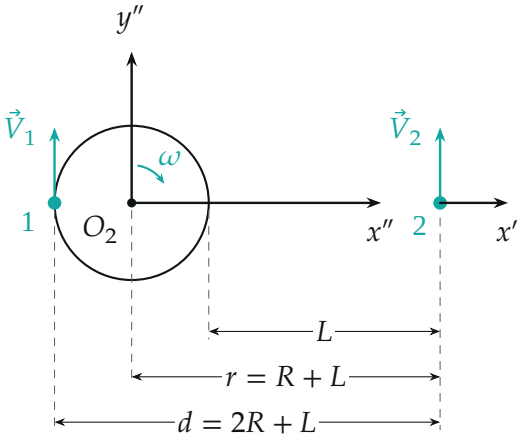
В некоторый момент времени школьники оказались на прямой, проходящей через центр карусели (см. рис.), в этот момент второй школьник находится на расстоянии $L = 9$ м от края карусели. Вектор скорости $\vec{V}$ каждого школьника в этот момент показан на рисунке к задаче.

2. Найдите в этот момент скорость $\vec{U}_1$ первого школьника в подвижной системе отсчёта $x'O_1y'$, связанной со вторым школьником. Система отсчёта $x'O_1y'$ движется поступательно относительно лабораторной системы xOy.

3. Найдите в этот момент скорость $\vec{U}_2$ второго школьника во вращающейся системе отсчёта $x''O_2y''$, связанной с первым школьником. Точка O_2 — начало вращающейся системы отсчёта. В ответе укажите модуль и направление вектора $\vec{U}_2$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Первый школьник едет по окружности: у него есть ускорение к центру, и опора давит на него не только вверх. Второй едет по прямой с постоянной скоростью, его вес равен силе тяжести. Во втором и третьем пунктах работает один закон: скорость в лабораторной системе равна скорости относительно подвижной системы плюс скорость той точки системы, где тело находится сейчас. У поступательной системы скорость всех точек одна, а у вращающейся она растёт с расстоянием до оси.

Обозначения. R — радиус карусели, m — масса школьника, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ — силы опоры на первого и второго, $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ — их скорости в лабораторной системе.



Вид сверху в нужный момент (масштаб: 1 см ≈ 2,9 м). Точки 1 и 2 — школьники, $x''O_2y''$ вращается вместе с каруселью по часовой стрелке, $x'O_1y'$ — поступательная система, начало O_1 в точке 2.

Пункт 1.

1. Радиус и ускорение первого. Первый сидит на краю и движется

со скоростью V по окружности с угловой скоростью ω, поэтому

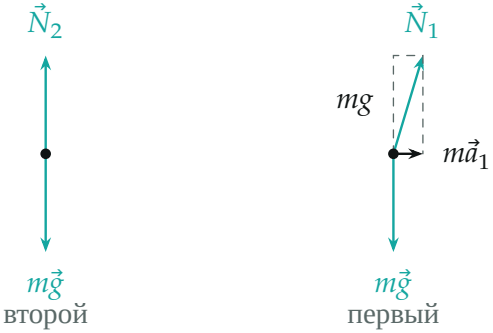
$$V = \omega R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{V}{\omega} = 3\text{ м}, \qquad a_1 = \omega^2 R = \omega V = 3\text{ м/с}^2,$$

ускорение направлено к центру карусели.

2. Веса. Запишем второй закон Ньютона для каждого школьника. Второй: ускорения нет, $N_2 = mg$. Первый: $m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{N}_1$, вертикальная часть N_1 равна mg, горизонтальная ma_1:

$$N_1 = m\sqrt{g^2 + a_1^2} = mg\sqrt{1 + k^2}, \qquad k = \frac{a_1}{g} = \frac{\omega V}{g} = 0{,}3.$$

Вес — сила, с которой школьник давит на опору, по третьему закону Ньютона он равен N по модулю: $P_1 = N_1$, $P_2 = N_2 = mg$.



Силы на школьников. Второй: $\vec{N}_2$ уравновешивает $m\vec{g}$. Первый: вертикальная часть $\vec{N}_1$ равна $m\vec{g}$, горизонтальная создаёт $m\vec{a}_1$ к центру. Масштаб: $mg : ma_1 = 10 : 3$; $\vec{a}_1$ направлено к центру.

3. Разность в процентах. Вопрос — на сколько вес второго меньше веса первого, то есть доля от P_1:

$$\delta = \frac{P_1 - P_2}{P_1} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}\right) \cdot 100\%.$$

Условие велит пользоваться приближением $(1 + x)^n \approx 1 + nx$. Здесь

$x = k^2 = 0{,}09 \ll 1$ и $n = -\frac{1}{2}\colon (1 + k^2)^{-1/2} \approx 1 - \dfrac{k^2}{2}$, поэтому

$$\delta \approx \frac{k^2}{2} \cdot 100\% = \frac{\omega^2 V^2}{2g^2} \cdot 100\% = \frac{0{,}09}{2} \cdot 100\% = 4{,}5\%.$$

Ответ — 4,5%: так считают по указанию условия. Без приближения $(1 - 1/\sqrt{1{,}09}) \cdot 100\% \approx 4{,}2\%$; разница — отброшенные слагаемые порядка k^4 (от веса второго было бы 4,4%, а по указанию — те же 4,5%).

Пункт 2.

4. Поступательная система. Система $x'O_1y'$ движется поступательно со скоростью второго школьника: у всех её точек скорость $\vec{V}_2$. Закон сложения скоростей для первого:

$$\vec{V}_1 = \vec{U}_1 + \vec{V}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{U}_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2.$$

Обе скорости направлены вверх и равны по модулю, поэтому

$$\vec{U}_1 = \vec{0}.$$

Второй видит первого неподвижным, но только в этот момент: скорость первого поворачивается, а скорость второго нет.

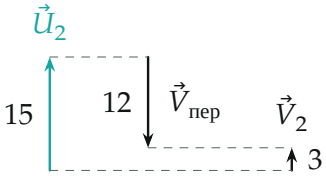
Пункт 3.

5. Переносная скорость. Система $x''O_2y''$ вращается вместе с каруселью по часовой стрелке с угловой скоростью ω. Второй школьник лежит на оси x'' на расстоянии $r = R + L = 12$ м от O_2. Точка системы на этом расстоянии движется по окружности радиуса r: $V_{\text{пер}} = \omega r$, направлена перпендикулярно x'' и по часовой стрелке, то есть вниз (против y'').

6. Закон сложения скоростей. $\vec{V}_2 = \vec{U}_2 + \vec{V}_{\text{пер}}$. Проекция на ось y'' (вверх, вдоль $\vec{V}_2$):

$$V = U_2 - \omega r \quad \Rightarrow \quad U_2 = V + \omega(R + L) = 3 + 1 \cdot 12 = 15 \text{ м/с}.$$

Проекция на x'' равна нулю: $U_{2x''} = 0$. Вектор $\vec{U}_2$ направлен вдоль оси y'', то есть так же, как $\vec{V}_2$.

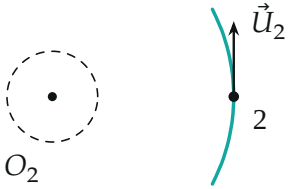


Все векторы вдоль y'' (сдвинуты по горизонтали). Числа — модули в м/с, масштаб 1 см = 10 м/с: $\vec{U}_2$ вверх, затем $\vec{V}_{пер}$ вниз, в сумме $\vec{V}_2$.

Второй способ. Запишем связь $\vec{V} = \vec{U} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ для обоих школьников и вычтем:

$$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = (\vec{U}_2 - \vec{U}_1^{\text{кар}}) + \vec{\omega} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

Первый сидит на карусели, $\vec{U}_1^{\text{кар}} = 0$; лабораторные скорости одинаковы, $\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = 0$ (пункт 2). Тогда $\vec{U}_2 = -\vec{\omega} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$: по модулю $\omega d = 15$ м/с, где $d = 2R + L$ — расстояние между школьниками, направление вверх. Результат тот же.



Путь второго школьника в системе карусели (масштаб 1 см = 5 м). Стрелка $\vec{U}_2$: 1 см = 15 м/с.

Проверка. Размерности: $\omega(R + L)$ — $\text{с}^{-1} \cdot \text{м} = \text{м/с}$. Предел $L = 0$: второй у края, где точка карусели едет вниз со скоростью V, а он вверх; формула $U_2 = 2V + \omega L$ даёт $2V$. Численно: координаты $(12,\ 3t)$ в осях, повёрнутых на ωt, продифференцированы: $(0;\ 15)$ м/с. Смысл: с карусели велосипедист кажется быстрее: к его скорости добавляется убегание карусели.

Ответ. 1) $\delta \approx \omega^2 V^2/(2g^2) \cdot 100\% = 4{,}5\%$; 2) $\vec{U}_1 = 0$; 3) $U_2 = V + \omega(R + L) = 15$ м/с, $\vec{U}_2$ сонаправлен с $\vec{V}_2$ (вдоль оси y'').